Taller de Matemática

Ciclo de Inicio Universitario

3ª edición

Universidad Nacional de José C. Paz

COLECCIÓN MORRAL DE APUNTES

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

Taller de Matemática

Taller de Matemática

Ciclo de Inicio Universitario

3° edición

Universidad Nacional de José C. Paz

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

Colección **Morral de Apuntes**

Taller de matemática. - 3a edición para el alumno - José C. Paz : Edunpaz, 2019.
112 p. ; 20 x 14 cm.
ISBN 978-987-4110-41-1
1. Matemática. I. Título.
CDD 510

3ª edición, diciembre de 2019

ISBN: 978-987-4110-41-1

Carta de bienvenida

Estimados y estimadas ingresantes:

Con gran alegría les damos la bienvenida a la Universidad Nacional de José C. Paz, institución nacional, pública y gratuita que abrió sus puertas a los estudiantes en el año 2011 y hoy los recibe expectante y comprometida con el proceso formativo que están por iniciar. Expectante, porque todas y todos los que trabajamos en la UNPAZ estamos interesados y dispuestos a ayudarlos a efectivizar el derecho a la Educación Superior, y comprometida, con la sociedad y con ustedes en particular, porque hacemos el mayor esfuerzo por ofrecerles una propuesta académica de calidad, que los ayude a transitar este nuevo desafío con entusiasmo y responsabilidad.

Hasta hace algunos años, quienes vivían en esta región del conurbano debían realizar un largo viaje para acceder a estudios universitarios. El camino era solitario, no solo por la distancia, sino también por la circunstancia de tener que estudiar en un lugar que, al principio, resultaba extraño, que contemplaba las necesidades de los alumnos, pero no siempre de todos, y mucho menos de quienes venían de lugares más alejados.

Hoy contamos con una Universidad que no solo está cerca, sino que despliega un proyecto sólido y con impulso de futuro. Venimos creciendo de manera sostenida en cuanto a oferta de carreras de grado y pregrado, matrícula de estudiantes, planta docente e infraestructura. Hemos consolidado una comunidad académica comprometida con la construcción de una sociedad más justa y solidaria. Desde octubre de 2015 la UNPAZ funciona con la plena autonomía que le confiere la Constitución Nacional y cuyo carácter democrático garantiza la

elección de sus autoridades de manera periódica, con participación de todos los estamentos o claustros: los graduados, los docentes, los trabajadores no docentes y también, por supuesto, ustedes, los estudiantes.
Quienes formamos parte de esta casa de altos estudios entendemos que nuestra Universidad debe ser un espacio comprometido con su territorio, es decir, que participe activamente del entorno sociocomunitario y haga parte a su pueblo de la vida universitaria. En este sentido, estamos convencidos de que la Universidad debe ser inclusiva y esto implica no solo ofrecer la posibilidad de ingresar a una carrera sino también de desplegar todas nuestras energías para que puedan graduarse en un plazo razonable, de acuerdo al programa de cada carrera. Responsabilidad que, por supuesto, es compartida entre autoridades, docentes y estudiantes. Solo así, aportando cada uno su granito de arena, podremos garantizar un derecho que históricamente ha sido vulnerado para nuestra población: el derecho de ustedes a la educación superior y el de la comunidad a beneficiarse del conocimiento de los profesionales que, con su esfuerzo, contribuyó a formar.
Esperamos que este camino que hoy eligen iniciar en la universidad pública los conduzca a convertirse en profesionales con nivel académico y responsabilidad social, comprometidos con los valores democráticos y la cultura nacional y latinoamericana en la que estamos inmersos.
Desde la UNPAZ, haremos todo lo que esté a nuestro alcance para acompañarlos en este recorrido porque hemos soñado con el presente de nuestra universidad y nos proyectamos a seguir creciendo con cada uno de ustedes.
Los saludo afectuosamente y les deseo todo lo mejor para esta etapa formativa que comienzan.

Darío Exequiel Kusinsky
Rector

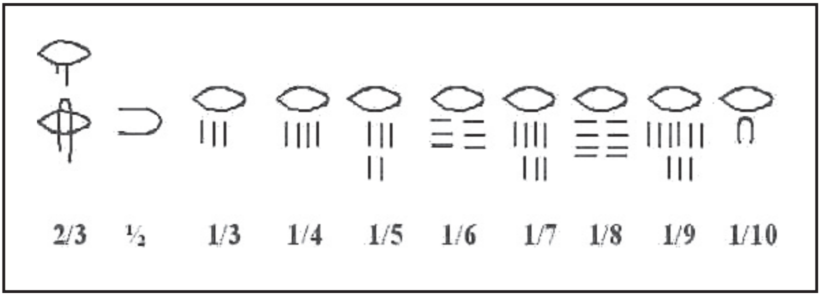
Índice

Unidad 1

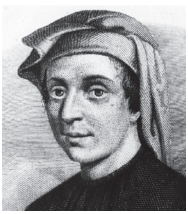
Trabajar en matemática está asociado a resolver problemas. Resulta difícil imaginar cuáles fueron los primeros problemas que tuvieron que resolver los seres humanos. Sin embargo, no cabe duda de que al enfrentarse a variedad de situaciones, en algunas de ellas necesitaron, por ejemplo, utilizar números. La elaboración de calendarios para anticipar los tiempos de siembra y cosecha, los modos de registrar transacciones comerciales, la búsqueda de regularidades para predecir un fenómeno natural o la estimación de medidas para realizar una construcción pueden servir como ejemplos de ese trabajo numérico.

Claro que la construcción de las nociones matemáticas, tal como hoy las conocemos, demandó siglos de trabajo, de grupos de personas que necesitaban resolver diferentes problemas. Podemos sostener, sin temor a equivocarnos, que gran parte del conocimiento matemático surge de la interacción de las personas entre sí y con su medio, para dar respuesta a problemas y necesidades de la vida en sociedad. Vale decir que la matemática se construye a partir de la resolución de problemas y son estos los que dan cuenta del tipo de quehacer que se pone en juego.

Tomemos, por ejemplo, el caso de las fracciones. Hace casi 4000 años, los babilonios ya las usaban, pero los que dieron impulso a estas nociones fueron los egipcios, que resolvían problemas de su vida diaria mediante operaciones con fracciones. La distribución de las raciones de pan, la manera de organizar el sistema de construcción de las pirámides y algunas medidas necesarias para dividir los campos luego de las crecidas del río Nilo, son claros ejemplos que surgen de las antiguas inscripciones que aparecen en el Papiro de Ahmes. Al igual que otras nociones matemáticas, las fracciones se originan para dar respuesta a la necesidad de resolver problemas prácticos.



Las fracciones según la representación de los egipcios



Con el uso por distintos grupos sociales y su estudio, surgen otros problemas. Solo a modo de ejemplo, en el siglo VI D.C, los hindúes establecen las reglas de las operaciones con fracciones y en Europa, Leonardo de Pisa (matemático conocido como Fibonacci 1170-1250 d.C.) es quien propone en sus escritos la famosa barra con la que hoy representamos a las fracciones. Otro dato: recién a partir del año 1700 se generaliza el uso de la línea fraccionaria que usamos hoy.

Volviendo a nuestra apertura, debemos situar el quehacer matemático dentro de las actividades humanas y a la matemática como una obra, un producto cultural y social, en tanto depende de las concepciones de la sociedad y la época en la que surge, como resultado de la interacción de los grupos sociales. Desde esta perspectiva, la matemática es una obra abierta, en construcción y que evoluciona de manera permanente. Así que iniciemos el trabajo resolviendo un problema.

ACTIVIDADES INTRODUCTORIAS

Para comenzar, trabajaremos con una serie de actividades vinculadas al contenido de fracción.

a) De dos chocolates iguales, Sebastián corta uno en seis partes iguales y se come cuatro. Marcos corta el otro en ocho partes iguales y come cinco. ¿Quién come más chocolate?

b) De una enciclopedia de 480 páginas, 200 de ellas tienen ilustraciones. ¿Qué parte del libro no tiene ilustraciones?

c) El profesor de matemática de Marcos le deja un sobre con 4 tiras de cartulina de distintos colores y de distintas medidas para que realice una tarea con sus compañeros. La idea es que tomen algunas medidas, pero luego, quiere que comparen las medidas entre ellas.

Ellos realizaron lo pedido, observaron y anotaron lo siguiente:

- 6 tiras azules miden lo mismo que 3 tiras rojas
- 9 tiras verdes miden lo mismo que 27 tiras rojas
- 24 tiras marrones miden lo mismo que 18 tiras rojas
- 20 tiras amarillas miden lo mismo que 12 tiras rojas

El profesor pide, como actividad final, que ordenen las tiras de menor a mayor medida. ¿Podrías ayudarle a completar su tarea?

d) El grupo de compañeros de Sebastián está trabajando con tiras de cartulina. Con la actividad que su docente les dejó, pudieron expresar las siguientes conclusiones:

-Si se juntan 4 tiras rojas, la longitud es la misma que si se juntan 5 tiras verdes.

-Si se juntan 20 tiras rojas, la longitud es la misma que si se juntan 35 celestes.

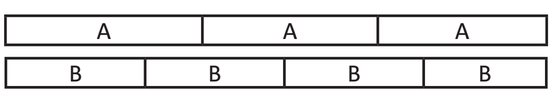
Ahora juntate con tu compañero y respondan las siguientes preguntas:

-¿Es cierto que una tira verde es más larga que una tira celeste? Justifiquen la respuesta.

-¿Cómo es la tira verde respecto de la celeste?

e) Se tienen varias tiras de estas dos medidas

al colocarlas una al lado de la otra, como muestra la figura, coinciden en longitud



Decidí, sin medir, qué parte de la tira A es la B y qué parte de la tira B es la A.

f) Se sabe que dos tiras de una cierta medida miden juntas lo mismo que 5 tiras de otra medida. Decidí cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones es o son correctas:

-3 tiras A miden lo mismo que 6 tiras B

-dos quintos de la tira A miden lo mismo que la tira B

-la tira B es dos veces y media la tira A

-2 * A = 5 * B

-2 * B = 5 * A

1. De descuentos y otros porcentajes

El planteo de considerar la matemática como una obra cultural y social, podría ubicarnos de manera diferente a lo que quizás recordamos sobre nuestro paso por la escuela. Poder encontrar procedimientos propios para resolver un problema, poner en juego ideas y hacer suposiciones sobre cuáles pueden ser los mejores modos de resolver, debatir acerca de ellos, comprobar los resultados y poder comunicarlos, es decir, relacionarse con el quehacer matemático es lo que consideramos necesario para afrontar una carrera universitaria desde esta particular obra de conocimiento.

En muchas situaciones de la vida cotidiana se usan porcentajes para determinar un descuento en una compra o venta, el monto de un impuesto o cómo se incrementa por los intereses una cierta cantidad de dinero cuando se pide un crédito. En estos casos es común usar la calculadora, con el recaudo de poder controlar los resultados obtenidos.

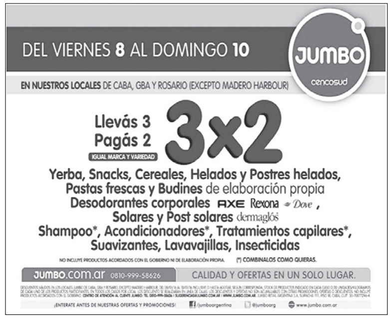
ACTIVIDAD 1

a) Al comprar un mismo producto en ambas cadenas, por ejemplo, paquetes de ½ kg de yerba, ¿cuál de las ofertas es más conveniente? ¿Por qué?

b) Tu respuesta anterior, ¿sirve para cualquier producto? ¿Y si necesitás comprar paquetes de pañales?

c) Si deciden hacer las compras para compartir el gasto entre tres personas, ¿se modifica en algo tu respuesta sobre cuál es más conveniente? ¿Por qué?

d) ¿Cómo convencés a tus compañeros de que estás en lo cierto? Buscá ejemplos que ayuden a entender tus respuestas.



ACTIVIDAD 2

Para hacer con la calculadora del celular.[1]

a) ¿Cuál es el resultado de 120 × 40% y 120 ÷ 40%? ¿Cómo se interpreta el valor obtenido?

Y si se marcan 120 + 40%? ¿y 120 - 40%? ¿Pensás que se obtienen los mismos resultados si se marcan los números en otro orden, por ejemplo 40 × 120% o 40 ÷ 120%? ¿Por qué?

b) Anotá los pasos que hay que seguir con tu calculadora para obtener.[2]

- el **X** por ciento de una cantidad **Y**
- el resultado de realizar un descuento del **X** por ciento a una cantidad **Y**
- el resultado de aumentar en un **X** por ciento a una cantidad **Y.**

c) Compará tus respuestas con las obtenidas por otros compañeros. Registren las conclusiones con las que hayan acordado entre todos.

1. Puede utilizarse cualquier celular que cuente con sistema operativo Android o modelos anteriores.

2. En esta actividad las letras **X** e **Y** toman los valores que quieras asignarle, para poder avanzar con las instrucciones necesarias para calcular porcentajes con la calculadora del celular.

ACTIVIDAD 3

Poné en juego las respuestas y conclusiones a las que llegaron en la siguiente situación.

Marca: Nokia
Código del producto:
LUMIA640B
Disponibilidad: En stock
Precio lista: $5000 oferta: $4400
en 12 cuotas de $366,58
Efectivo: $3800

a) ¿Cuál es el porcentaje de descuento pagando en 12 cuotas respecto del precio de lista? Y si el pago es en efectivo, ¿cuál es el porcentaje de descuento?

En términos matemáticos, el porcentaje es una relación entre dos grupos de valores en donde se considera para uno de ellos, 100 unidades.
-Por ejemplo, si sobre una compra de $140 realizan un descuento de $35, significa que cada $100 me descuentan $25. Porque 35/140 = 25/100, la razón entre el descuento y el valor original es de 25 en 100, o sea del 25%.
-Otro ejemplo que puede servir es considerar que una taza de cereal de 40 g contiene 20 g de azúcar, o sea que la mitad es azúcar, que equivale a considerar que cada 100 g de cereal hay 50 g de azúcar; 20/40 = 50/100, es decir que la razón entre el peso del azúcar y el peso completo del cereal es del 50%.

ACTIVIDAD 4

Marcos y Juan estaban buscando descuentos en marcas deportivas cuando encontraron la promoción indicada en la imagen. A Marcos le pareció que había errores en los porcentajes que se indicaban ya que, según él: ***el 20% más el 35% no es el 48%.***

Pero Juan opinaba lo contrario, indicando que el equivocado era Marcos.

a) ¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué? ¿Cómo se calcula el porcentaje de un descuento que se agrega a otro?

b) Realizá una tabla que te permita argumentar ante tus compañeros tus respuestas anteriores. ¿Sucederá lo mismo con las demás ofertas?

c) La empresa es la que determina a qué productos y qué porcentajes de descuentos aplica. ¿Qué criterios pensás que va a utilizar? ¿A qué productos le aplicará el mayor descuento? ¿Por qué?

d) Si te dieran a elegir el orden en que se aplicarán los descuentos, ¿cuál elegirías? ¿Por qué?

Actualmente, nos llegan ofertas desde distintos medios para que consumamos tal o cual artículo, nos asociemos a determinada empresa de comunicaciones o bancaria, en base a proponernos paquetes de servicios que parecen muy ventajosos pero que es necesario estudiar si son convenientes o no, para poder explicar si estamos a favor o en contra de comprarlos o contratarlos.

a) Buscá en facturas de servicios, avisos en el diario, carteles de promoción en un banco, etc., expresiones en las que aparezcan porcentajes.

b) Anotá tres y explica qué significa cada expresión.

c) Identificá si la propuesta que se anuncia te resulta conveniente, indicando los motivos de tu elección.

2. Mezclas, relaciones entre magnitudes

En esta primera unidad comenzamos a transitar el camino para vincularnos con esta forma particular de quehacer matemático, donde la comunicación y los argumentos sobre lo producido son una parte fundamental, ya que dan cuenta de nuestra manera de pensar. De eso se trató al tener que calcular y comparar porcentajes, teniendo que decidir sobre la conveniencia de una propuesta comercial.

Esta también es una perspectiva social y política. Se trata de desarrollar capacidades para situarse de forma activa frente al uso cada vez más frecuente de estadísticas, encuestas, índices, que abundan como argumento matemático en los discursos sociales.

Hasta aquí, nos ocupamos de trabajar con algunas nociones matemáticas ligadas a problemas de porcentajes/descuentos, avanzando en esta parte con equivalencias entre unidades de medida, que nos servirán para trabajar con las propiedades de la proporcionalidad directa y algunos de los conceptos asociados.

Los números naturales nos permiten contar los asistentes a un espectáculo, los nacimientos producidos durante el primer día del año, la producción de herramientas de una fábrica en un día, etc., pero para medir la longitud de una cuerda, el peso de un camión de cereales o la temperatura de un cuerpo se usan los números racionales. Para expresar estas cantidades se utiliza un número y una unidad de medida, por ejemplo: 2,7 metros, 4,5 toneladas, 12°.

Cantidad

2,7 metros

Medida unidad

Para utilizar los términos adecuados, vamos a denominar magnitud a los atributos físicos que podemos medir. En 1960, la 11ª Conferencia General de Pesas y Medidas estableció en París el Sistema Internacional de Medidas (SIM) que terminó de definirse en 1971 al considerar 7 magnitudes con su unidad fundamental. En la Argentina su uso se estableció en marzo de 1972 a partir de la Ley N° 19511 y lo conocemos con el nombre de Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA).

MAGNITUD	LONGITUD	TIEMPO	MASA	CORRIENTE ELÉCTRICA	TEMPERATURA	INTENSIDAD LUMINOSA	CANTIDAD DE SUSTANCIA
unidad	metro	segundo	kilogramo	ampere	kelvin	candela	mol

En el caso de las magnitudes longitud y masa este sistema tiene la misma estructura que el sistema decimal de numeración, dado que los cambios de unidades se realizan de 10 en 10. No ocurre lo mismo con las otras, que responden a otras relaciones

1 centena = 10 decenas = 100 unidades
1 décimo = 10 centésimos = 100 milésimos
1 hectómetro = 10 decámetros = 100 metros
1 decímetro = 10 centímetros = 100 milímetros

Entonces, para realizar una medición es necesario comparar la magnitud en relación con una unidad de medida. Por ejemplo, al medir la longitud de una cinta, podemos considerar como unidad el centímetro, o para establecer la capacidad de un recipiente, utilizar el litro. Así es posible asociar un número determinado a esa cantidad.

A continuación vamos a trabajar en otro contexto, relacionado con las ciencias naturales, donde las magnitudes y sus unidades de medida tienen aplicación. Las actividades que presentamos dan cuenta de la concentración de calcio[3] que poseen ciertos alimentos.

Por curiosidad,

-¿sabés cuál es el valor diario recomendado que debemos consumir de calcio? ¿Y cuáles son los alimentos que proporcionan mayor cantidad de calcio?

-Una vez consumido, al ser necesario para la salud, ¿cómo se hace para no eliminarlo?

ACTIVIDAD 6

La Organización Mundial de la Salud (OMS) aconseja a las personas de 9 a 18 años consumir 1.300 mg de calcio por día para tener huesos sanos y fuertes, ¿les recuerda alguna publicidad?

Para conocer la concentración de calcio que poseen determinados alimentos se presenta a continuación la siguiente tabla:

ALIMENTOS	Gramos de alimento	Contenido en Calcio (mg)
Carne vacuna	20	3
Acelga/espinaca	20	24
Almendra	10	25
Lentejas	10	20

a) Considerá distintas porciones de estos alimentos, ¿cuántos miligramos de calcio aportan?

- un churrasco de carne vacuna de 180 gramos,
- una porción de tarta que contiene 225 gramos de acelga,
- un puñado de almendras de 25 gramos,
- otros que se te ocurran.

b) ¿Cuántos miligramos de calcio contiene cada gramo de alimento de la imagen que se presenta? ¿Por qué están expresados considerando 100 g de alimento?

3. Se llama concentración de calcio a la cantidad de miligramos (mg) de calcio por cada gramo de alimento.

c) ¿Con qué debemos alimentarnos para cumplir con lo indicado por la OMS? Hacé una propuesta para la dieta de un día para una persona en el rango de edad indicado.

ACTIVIDAD 7

La próxima tabla muestra la cantidad de calcio que contienen diferentes lácteos, dando valores aproximados extraídos del Comité Nacional de Endocrinología de la Sociedad Argentina de Pediatría:

LÁCTEOS	Gramos	Contenido en Calcio (mg)
Leche entera	250	275
Leche descremada	200	240
Leche fortificada	100	184
Yogur entero	160	240
Yogur descremado	120	195
Yogur fortificado	200	625

a) Realizá los cálculos necesarios para seleccionar pares de lácteos que tengan mayor concentración de calcio, por ejemplo: leche descremada y yogur fortificado, o yogur entero y leche descremada. Explicá tu elección.

b) Compará qué lácteo tiene mayor concentración de calcio:

- leche descremada y yogur descremado
- leche entera y leche descremada

c) ¿Qué tuviste en cuenta para realizar las comparaciones?

ACTIVIDAD 8

Al resolver la actividad anterior, es posible utilizar fracciones para expresar la concentración de calcio (mg) por cada gramo de lácteo. Por ejemplo, **24/16** expresa que el yogur entero tiene **24 mg de calcio por cada 16 gramos de alimento**.

a) ¿Es equivalente a 3/2, o sea que 2 gramos de yogur entero contienen 3 mg de calcio? ¿Cómo explicarías tu respuesta?

b) Indicá cuáles de las siguientes expresiones corresponden a los lácteos de la tabla anterior. No olvides explicar por escrito cómo te diste cuenta.

3/2	120/100	97/60	25/8	195/120
275/250	13/8	312/100	6/5	11/10

c) Al establecer la relación entre las concentraciones de calcio y las fracciones, estuviste comparando estas expresiones. A modo de ejercitación, trabajando en el contexto exclusivamente matemático, ordená de menor a mayor las siguientes expresiones e indicá qué tuviste en cuenta al hacerlo.

3/2 3/4 6/8 6/12 2/5 10/6

Hasta aquí, utilizamos la relación que existe entre la cantidad de calcio y el peso en determinados alimentos, a modo de ejemplo, para trabajar con los números racionales en el contexto de la proporcionalidad; esto se muestra al recuperar las distintas maneras de responder las preguntas a partir del uso y comparación de estos números. Al reflexionar sobre los contenidos matemáticos, podemos decir que la concentración de calcio es un cociente (resultado de una división) cuyo resultado es un número racional, ya sea expresado como una fracción o como una expresión decimal. Por ejemplo, en el caso del yogur entero, 3/2 indica que hay 3 mg de calcio por cada 2 g de yogur o, usando una expresión decimal, 1,5 mg de calcio por cada 1 g de yogur.

En general, se pueden mencionar tres posibles estrategias matemáticas utilizadas en la resolución:

- "regla de tres simple"

Por ejemplo, si en 20 g de carne vacuna hay 3 mg de calcio, en 180 g corresponde:

X = 180 · 3 / 20 = 27, es decir, 27 mg de calcio

- recurrir a las propiedades de la proporcionalidad: "el doble, con el doble", "la tercera parte con la tercera parte", "a la suma de los elementos de una de las magnitudes (cantidad de alimento) le corresponde la suma de sus correspondientes de la otra (cantidad de calcio)"

Usando el mismo ejemplo, como 180 es 9 veces 20, entonces la cantidad de calcio correspondiente a 180 g de carne es igual a 3 mg · 9 = 27 mg

- averiguar el valor de la unidad

Esto significa que el procedimiento tuvo en cuenta que si 20 g contienen 3 mg de calcio, para averiguar cuánto calcio contiene 1 g de carne hay que realizar la división 3/20.

Las situaciones de proporcionalidad directa dan la posibilidad de trabajar con estrategias diferentes para un mismo problema, pero exigen la capacidad de organizar información y se relacionan, por ejemplo, con:

-las operaciones de multiplicar y dividir,

-las tablas y reglas de cálculo,

-las equivalencias entre unidades de medida,

-el factor de escala, los gráficos estadísticos, con los que vamos a trabajar más adelante,

-la geometría vinculada con la semejanza,

-las equivalencias químicas,

-las definiciones de unidades compuestas tales como densidad, velocidad y/o aceleración.

Y otras cuestiones que seguramente encontrarán en las materias de sus respectivas carreras.

ACTIVIDAD 9

¿Cuáles de los conceptos recién mencionados recordás? Puede ser útil revisar algunos libros o apuntes de la escuela secundaria.

Intentá escribir el significado de alguno de los conceptos anteriores, quizás dando ejemplos.

Indicá otro ejemplo que relaciones con situaciones de proporcionalidad.

Para poder avanzar, vamos a recuperar algunos de estos conceptos, a partir de su estudio matemático, brindando ejemplos que permitan reconocerlos. Es importante aclarar que cuando se define y ejemplifica un concepto, esto solo da cuenta de un recorte particular, de una posible manera de abordarlo.

I.-La *razón* entre dos cantidades ***a*** y ***b*** es un número **R**, tal que a = R x b, es decir, el número que expresa la razón entre una cantidad y otra tomada como unidad, es la medida de la primera respecto de la segunda.

Por ejemplo, la razón entre la cantidad de lentejas (en mg) con respecto a la cantidad de calcio (también en mg) es de 2 mg en 1000 mg, ya que la concentración en 100 g de lentejas es de 200 mg de calcio.

Otro ejemplo, la superficie de un cuadrado de papel glasé con respecto de la superficie de un cuadradito de 1 cm de lado es 100. Esto es porque la superficie de un cuadrado de papel glasé = 10 x 10 y la superficie de un cuadrado de 1 cm de lado = 1 cm^2

El valor de la cantidad es el producto de la medida (100) por la unidad adoptada (1 cm^2)

1 dm^2 = 100 cm^2

II.-Proporción numérica

Los números ***a***, ***b***, ***c*** y ***d*** forman una proporción si la razón entre ***a*** y ***b*** es la misma que entre ***c*** y ***d***.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por ejemplo: 3/7 y 9/21 forman una proporción, ya que la razón entre 3 y 7 es la misma que la razón[4] entre 9 y 21. Es decir 3/7 = 9/21.

En $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hay cuatro términos: ***a*** y ***d*** se llaman extremos, ***c*** y ***b***, medios.

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios, esto es lo que explica la manera en que resolvemos algunos problemas de proporcionalidad, usando la llamada “regla de tres”.

En general

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

En los números del punto anterior 3/7 = 9/21 se cumple que el producto de los extremos 3 × 21 = 63 y el producto de los medios 7 × 9 = 63, son iguales.

También puede servir como ejemplo, la estrategia usada para calcular la cantidad de calcio en 180 g de carne vacuna, 3/20 = X /180

X = 180 · 3 / 20 = 27, es decir, 27 mg de calcio

III.-Cantidades *directamente proporcionales*

Ya abordamos distintas situaciones en donde trabajamos con cantidades directamente proporcionales, por ejemplo:

-de compra y venta de productos, al determinar el precio a partir del peso del producto o de la cantidad de unidades;

-al establecer la concentración de un elemento según el peso de un alimento.

4. De ser necesario, volvé a leer lo escrito sobre *razón*, en el punto anterior. Son conceptos asociados.

En estos casos al doble, triple... de una cantidad corresponde el doble, triple... de la otra, y si se realiza el cociente entre las cantidades que se corresponden se obtiene un mismo número. Decimos que esas cantidades son directamente proporcionales o que están vinculadas a través de una relación de proporcionalidad directa.

Si las cantidades de la siguiente tabla se corresponden de forma directamente proporcional, entonces deben cumplirse las equivalencias que figuran a continuación

X	Y
a	e
b	f
c	g
d	h

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g} = \frac{d}{h}$$

Dos valores cualesquiera de una columna y sus correspondientes en la otra forman una proporción y dados dos valores que se corresponden y un tercero, es posible calcular el medio o el extremo que falta de la proporción.

Trabajemos estas ideas con un ejemplo. Primero, resolvé el problema, y luego volvé sobre la lectura, para comprender mejor la teoría.

Problema: Teniendo en cuenta que una bolsa de semillas pesa 20 kg, ¿cuánto pesan 20 bolsas? Para transportar, se cuenta con un camión que puede cargar hasta 24 toneladas de semilla. ¿Cuántas bolsas puede transportar el camión en un viaje?

Al trabajar con relaciones, podemos utilizar distintos registros de representación de la misma situación:

-en lenguaje coloquial, que es el enunciado de la situación con palabras;

-en una tabla de valores, como la que figura a continuación;

-en un gráfico cartesiano;

-a través de una fórmula.

La situación sigue siendo la misma, pero depende de cómo se quiera dar a conocer la información, qué es importante destacar, o si nos interesa tener una respuesta general, el tipo de registro que utilicemos.

Veamos la información en una tabla de valores, que es el registro aritmético más habitual

NÚMERO DE BOLSAS	1	2	20	10	1.000	200
Peso en kg	20	40	400	200	20.000	4.000

Las cantidades de *bolsas de semillas* y *peso en kg* se relacionan de forma directamente proporcional.

-La constante de proporcionalidad para obtener el peso en kg de un cierto número de bolsas es 20.

kg de semillas = 20 x cantidad de bolsas

-La constante de proporcionalidad para obtener el número de bolsas de un cierto peso de semilla es 0,05.

Cantidad de bolsas = 0,05 x kg de semillas

El valor de la constante nos permite producir la fórmula o expresión algebraica de la relación.

Usando esta tabla se puede comprobar que, si se suman dos valores en una misma fila, es posible determinar el valor que corresponde a la suma, sumando los valores correspondientes en la otra fila. Por ejemplo, para calcular cuántas bolsas corresponden a 24.000 kg (24 ton) basta sumar las bolsas que corresponden a 20.000 kg y 4.000 kg

1.000	200	1.200
20.000	4.000	24.000

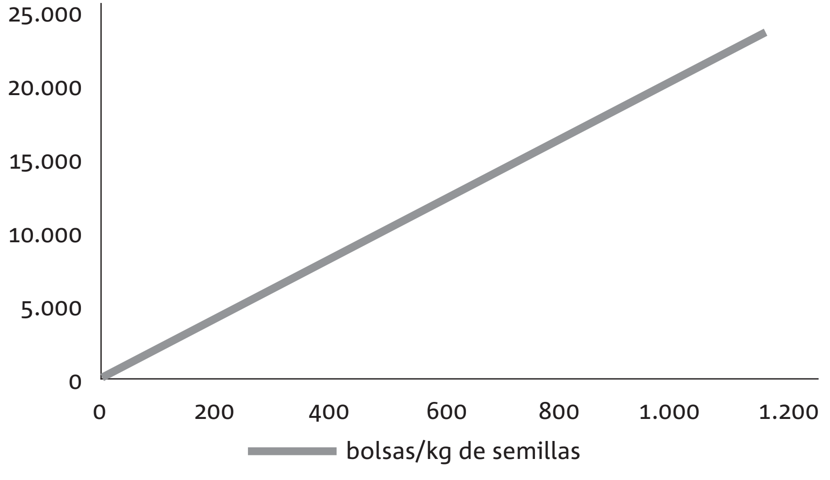
En general si dos cantidades se corresponden de forma directamente proporcional

CANTIDAD 1	CANTIDAD 2
a	e
b	f
c	g
d	h
a + b	e + f
b - d	f - h
c x n	g x n
c / m	g / m

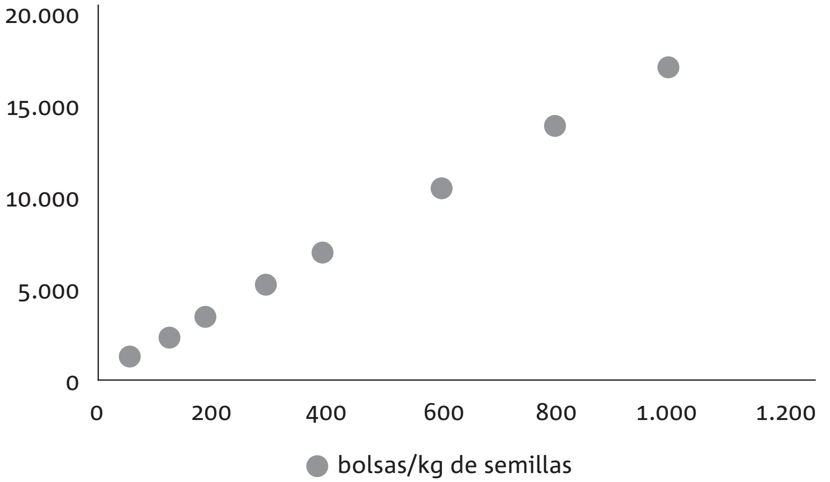
$$\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g} = \frac{d}{h} = \frac{a+b}{e+f} = \frac{b-d}{f-h} = \frac{c \cdot m}{g \cdot n} = \frac{c/m}{g/n}$$

Estas expresiones dan cuenta de las propiedades de la proporcionalidad directa.

Si los valores correspondientes a una relación de proporcionalidad directa se representan en un sistema de coordenadas cartesianas, los puntos del gráfico que se obtiene se encuentran en una recta que pasa por el origen de las coordenadas.



Si nos ponemos rigurosos, en términos matemáticos, por la información que poseemos, lo correcto es presentar el gráfico indicando los valores numéricos con los que contamos, dado que trabajamos con números racionales.



ACTIVIDAD 10

Una vez realizada la lectura y las actividades de esta unidad hasta aquí, volvé sobre la actividad 9 y reformulá tus respuestas.

Sobre lo desarrollado, ¿agregarías algo más?

ACTIVIDAD 11

Desde 1960, se realiza en nuestro país el censo de Población, Hogares y Viviendas a través del INDEC. Dicho censo se instrumenta por medio de encuestas a la población, cada diez años.

Los datos sobre totales de población y sobre cantidad de inmigrantes en nuestro país –para distintos censos– se presentan en la siguiente tabla:

Censo Año	Población		Inmigrante sobre Población total	
	Total	Inmigrante	Razón	%
1869	1.737.076	210.189		
1895	3.954.911	1.004.527		
1914	7.885.237	2.357.952		
1947	15.893.827	2.435.927		
1960	20.010.539	2.604.447		
1970	23.390.050	2.210.400		
1980	27.947.446	1.912.217		
1991	32.615.528	1.628.210		
2001	36.260.130	1.531.940		

a) Calcular la razón y el porcentaje de inmigrantes sobre la población total en cada año.

b) ¿Cómo fue evolucionando la cantidad de inmigrantes en nuestro país? ¿A qué creés que se debe esa evolución?

c) ¿En qué período considerás que llegaron más extranjeros a la Argentina? Podés confirmar tu decisión consultando alguna otra fuente.

d) Para comparar el aumento de la población no nativa entre 1869 y 1895, es posible afirmar que:

- ¿el aumento fue de aproximadamente un 377,92%?
- ¿la población aumentó un 478%?

3. Ampliar y reducir, escalas

Fotos, diagramas de exposiciones, planos de casas, esquemas para realizar un recorrido en un museo, mapas, esquemas para llevar a cabo la evacuación de un edificio...

Cantidad de ejemplos de representaciones que nos muestran el mundo físico donde desarrollamos nuestras actividades, en una superficie plana.

En el caso particular de escalas, algunas de las situaciones que continúan nuestro trabajo con la proporcionalidad directa están vinculadas con los puntos de referencia que reconocemos en una foto, la semejanza de los objetos dibujados, la relación de proporcionalidad que existe entre las medidas del original y su representación, la posibilidad de utilizar la escala para ubicarnos y determinar distancias a partir de un mapa.

ACTIVIDAD 12

Investigar y responder.

a) ¿Qué es una escala? ¿Para qué sirve?

b) ¿Por qué se dice que la escala está relacionada con las fracciones y las proporciones?

c) ¿Cómo se indica la representación a escala de un objeto? Muestren al menos dos ejemplos de diferentes escalas.

d) Expliquen qué significa la representación a escala en:

i) 1:20 ii) 1:100 iii) 1:200 iv) 1000:1

e) Entre las escalas de reducción señaladas en el ítem anterior, ¿qué escala representa el menor tamaño en relación con la medida del objeto real?

f) Si estamos observando un plano que está hecho en una escala de 1:100 y medimos sobre el plano una longitud de 2,5 cm, ¿cuál será la medida real de esta longitud? ¿Cuál sería la medida si el plano estuviese en una escala de 1:250?

ACTIVIDAD 13

Emiliano es maestro mayor de obras y tiene a su cargo la construcción de una vivienda con un solo dormitorio. Dispone de los planos originales que han sido confeccionados por el arquitecto. Como debía ausentarse, Emiliano decidió fotocopiar la parte del plano que correspondía a la habitación que debían empezar a construir. Cuando entregó la fotocopia a Fermín, uno de los albañiles, Emiliano le aclaró que había sido reducida al 50% y que el plano original, por su parte, había sido construido en una escala de 1:50.

Contento de su nueva responsabilidad, Fermín empezó a dirigir la construcción. Después de un día de trabajo, sus compañeros notaron que había algo raro, las dimensiones del dormitorio no guardaban relación con las dimensiones del resto de la casa.

a) ¿Qué podía haber ocurrido?

b) ¿Qué cálculos debió hacer el albañil para que el dormitorio quedara en proporción con respecto al resto de la casa?

Se trata de que registres el posible cálculo y la explicación que encontraste.

ACTIVIDAD 14

Mientras varios albañiles discutían qué podía haber pasado, Fermín recordó que el plano estaba construido en una escala de 1:50, lo que significaba que 1 cm del plano representaba 50 cm de la realidad, y que la fotocopia, reducida un 50% con respecto al plano, quería decir que las dimensiones lineales del plano original, en la fotocopia medían la mitad. Con estos argumentos, Fermín quiso mostrar que para construir la habitación había que usar una escala de 1:25.

a) ¿Estás de acuerdo con los argumentos de Fermín? ¿Por qué?

b) Realizá un dibujo aproximado de una habitación de 4 m x 6 m, que represente el plano original y la fotocopia.

ACTIVIDAD 15

En un mapa, la distancia aproximada desde Buenos Aires hasta Jujuy es de 15 cm en una escala de 1:1.000.000. ¿A qué distancia –en kilómetros– se encuentra la provincia de Jujuy de Buenos Aires?

4. A modo de cierre

Iniciamos este recorrido a partir del trabajo con porcentajes, como primer acercamiento a la proporcionalidad. Esto nos llevó a tener que revisar algunas propiedades de las operaciones, para poder controlar los cálculos, y sobre la comparación de números racionales, para establecer las relaciones entre razones numéricas.

Avanzamos en el trabajo, usando distintos registros de las relaciones numéricas entre magnitudes: los enunciados, las tablas de valores, los gráficos, dejando planteada la posibilidad de la expresión algebraica sobre la que avanzaremos en las siguientes unidades.

Otro concepto asociado, el de escala, nos permitió recuperar las distintas estrategias de resolución presentadas, así como la utilización de las propiedades de la proporcionalidad.

A lo largo del recorrido propuesto, las actividades asociadas a estos contenidos, fueron:

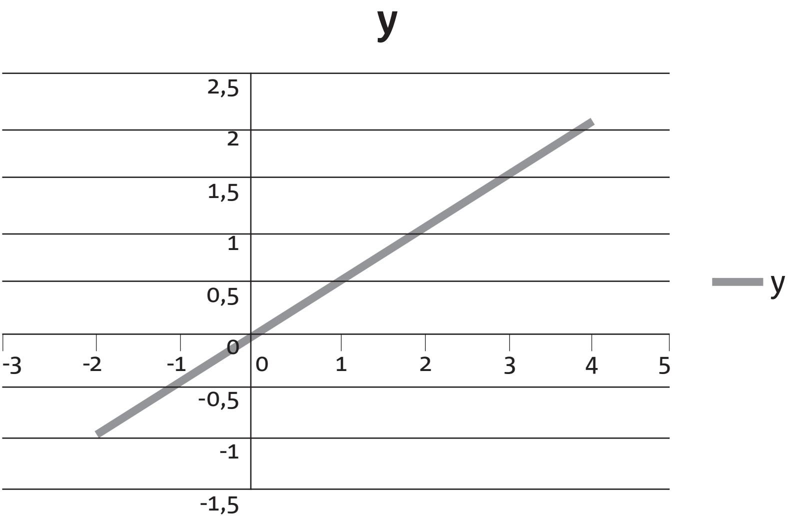
-cálculo de variaciones porcentuales, tendencias de variación, análisis de propiedades de las proporciones

-cálculo de razones, proporciones y tasas, análisis de afirmaciones, justificación de procedimientos, elaboración de gráficos.

La proporcionalidad debe ser estudiada como forma de cambio uniforme sobre ejemplos cotidianos y para, a partir de ella, analizar propiedades de otras funciones numéricas, geométricas o experimentales. El poder de las funciones consiste tanto en describir de manera simple situaciones complejas como en permitir la predicción de resultados, cuestiones con las que avanzaremos en la segunda unidad.

Podemos definir una función como una relación que pone en evidencia fenómenos de cambio en los que, por ejemplo, valores de una magnitud tienen un valor correspondiente de otra. La proporcionalidad es una función numérica cuya representación gráfica es una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es la constante de proporcionalidad. Esta puede ser representada por la ecuación $y = m \cdot x$

Por ejemplo, $y = \frac{1}{2} x$



ACTIVIDAD 16

En el transcurso de las clases, habrás podido identificar algunas dificultades y fortalezas en relación con el uso de las matemáticas que conocés. En tal sentido, reflexionando acerca de tu desempeño en relación con las siguientes cuestiones.

a) ¿Interpretaste la información contenida en los textos?

b) Al interpretar o expresar relaciones en lenguaje matemático ¿pudiste hacerlo en forma correcta desde el primer intento?

c) ¿Pudiste operar numéricamente y obtener resultados razonables en función de los datos?

d) ¿Qué considerás necesario seguir trabajando?

Unidad 2

Una de las ideas fundamentales que trabajamos en la Unidad 1 es que los conocimientos matemáticos surgen de la interacción de las personas con la realidad, para dar respuesta a distintos problemas y necesidades. Por eso, sostenemos que la matemática está en permanente construcción, que progresa a partir de nuevas formas de resolución de viejos problemas y el planteo de nuevos problemas.

Es necesario destacar que este desarrollo no fue lineal, hubo idas y vueltas, marchas y contramarchas hasta formalizar algunos de los conocimientos tal como hoy los conocemos; ejemplo de esto es la historia del concepto de función que abordaremos en la segunda parte de esta unidad.

Si bien en todas las épocas los problemas han tenido un rol fundamental, estos no siempre surgen de la vida cotidiana, sino que tienen distintas fuentes de origen.

- Ya mencionamos los problemas surgidos de la experiencia, de la práctica, como la construcción de los calendarios que estuvo en manos de sacerdotes y agricultores, o el uso y operatoria de las fracciones en el antiguo Egipcio.
- Otros han surgido a partir de preguntas y requerimientos de distintas disciplinas, como el cálculo diferencial e integral para resolver problemas de física, o el cálculo combinatorio empleado en teorías biológicas contemporáneas.
- También, algunos conocimientos han surgido de problemas puramente matemáticos, originados en el placer de resolver desafíos que han formado parte de la matemática de todas las culturas en todas las épocas.

Paralelamente se fue constituyendo un modo particular de producir y de pensar estos conocimientos y un lenguaje propio para expresarlos. La manera de comunicar y dar cuenta de la validez de los procedimientos es parte del quehacer matemático que abordamos en este curso.

Comencemos ayudando a Victoria en su tarea escolar. Se le ha planteado un problema, en el taller de matemática, en el que debe armar unas figuras con palillos o fósforos siguiendo un patrón de formación como ilustra la figura que a continuación se muestra.

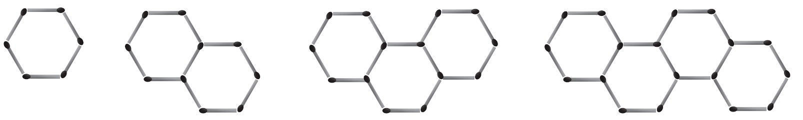


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuántos palillos se necesitan para la figura 5?

b) ¿Cuántas palillos se necesitan para la figura 10?

c) ¿Qué cuenta es necesario hacer para calcular cuántos palillos se necesitan para armar ***n*** figuras?[5]

d) Respetando el esquema, ¿si se usaron 201 palillos, cuántas figuras se arman? ¿Y si se usaron 406 palillos?

1. Expresiones algebraicas

Los palillos en la tarea de Victoria nos sirven de excusa para avanzar en el trabajo matemático. Seguramente, al responder las primeras preguntas te ha servido dibujar y contar la cantidad de palillos necesarios. Pero, al aumentar el número de figuras propuesto, la estrategia de contar uno a uno no resulta apropiada, debés buscar diferentes maneras para contar que no requieran la realización del dibujo completo.

Claro que hay distintas maneras de contar que, al resolver la pregunta d), generan diferentes modos de generalización y, por lo tanto, diferentes expresiones que usan la letra ***n***. Para aclarar estas ideas, te damos algunos ejemplos,

5. En este caso usamos la letra ***n*** para indicar que se trata de cualquier número natural, designado para los palillos.

-Javier llegó a la fórmula *6 + 5 (**n** - 1)* ya que contó 6 para la primera figura y luego, cada una de las ***n*** - 1 figuras restantes aportan 5 palillos más.
-Lucas, en cambio, llegó a la expresión *5**n** + 1*, porque considera que todas las figuras aportan 5 palillos y la última tiene 1 más.

ACTIVIDAD 2

a) ¿A qué expresión general llegaste?

b) Compartí tu trabajo con tus compañeros, comparando expresiones.

c) Las distintas expresiones presentadas, ¿son todas válidas? ¿Cómo lo averiguamos?

d) Si considero distintas expresiones válidas, ¿para cualquier valor de ***n*** el resultado de palillos es el mismo?

En esta actividad, disponer de una fórmula para modelizar[6] el problema planteado, permite predecir la cantidad de palillos necesarios para cualquier número de figuras sin necesidad de contar ni de dibujar. De la misma manera, es posible responder a la pregunta 1.e) mediante la resolución de una ecuación.

Sin embargo, en este ítem, para una de las preguntas, la ecuación tiene solución entera, es decir, puede dar cuenta de una cantidad determinada de palillos; pero en la otra no, por lo tanto, frente al resultado debés volver al contexto del problema y considerar que una tiene solución y la otra no. Es importante que te detengas a reflexionar para recuperar la idea de que una vez resuelta la ecuación, aunque encuentres una solución numérica, esto no significa que el problema tenga solución; debés ver si la solución encontrada tiene sentido en el contexto de la situación de origen.

Una vez resueltas estas actividades, te proponemos recordar algunos procedimientos de resolución de expresiones algebraicas, ya que su manipulación nos va a permitir avanzar con el trabajo con funciones. Se trata de ganar ciertas habilidades al operar con dichas expresiones.

6. En este caso, se trata de encontrar un modelo matemático, una expresión en este particular lenguaje que sirva para explicar y estudiar la situación que le dio origen.

Pero, antes de continuar, es apropiado ponernos de acuerdo al marcar la diferencia entre expresión algebraica y ecuación. En general, debemos considerar que la ecuación es una igualdad que lleva implícita una pregunta ¿para qué es verdadera? En tanto que, distintas maneras de contar generaron distintas maneras de escribir una fórmula general, es decir, distintas expresiones algebraicas. Claro que al aplicar cualquiera de ellas, acordada como válida, se obtienen los mismos resultados.

Entonces, vamos a decir que **dos expresiones algebraicas son equivalentes si cada vez que se reemplazan las letras por un número cualquiera en las dos, el resultado es el mismo**. Asimismo, si dos expresiones algebraicas son equivalentes, ambas tendrán que poder escribirse "de la misma forma", o sea, se debe poder transformar una de ellas en la otra usando las propiedades de las operaciones.[7]

Por ejemplo, $6 + 5\,(\boldsymbol{n} - 1) = 6 + 5\,\boldsymbol{n} - 5 = 5\,\boldsymbol{n} + 6 - 5 = 5\,\boldsymbol{n} + 1$,

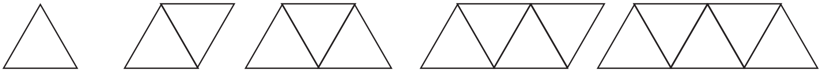
Avancemos un poco más con este tipo de trabajo, a partir del planteo de una situación en un contexto intramatemático que nos va a permitir ganar en destreza con estas expresiones.

Quizás, una marca característica de los seguidores de Pitágoras se pone en evidencia al considerar su concepción sobre los números, asignándoles interpretaciones geométricas. De allí que encontraban condiciones particulares para diferentes tipos de números: triangulares, cuadrangulares, perfectos, etc.

7. Las propiedades a las que se hace referencia son: conmutativa, asociativa y distributiva. Es conveniente que si no las recordás, dediques un momento a buscarlas en algún texto o en Internet.

ACTIVIDAD 3

Utilizando diferentes palillos se puede construir una serie de figuras con triángulos tal como se muestra en el dibujo, que continúa siguiendo el mismo patrón



a) Completá la tabla de valores que muestra la relación entre la cantidad de triángulos T que forma la figura y la cantidad P de palillos que se necesitan.

T									
P									

b) ¿Cuántos palillos hacen falta para armar una figura de 100 triángulos?

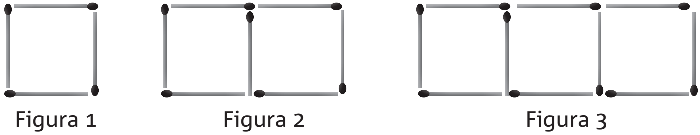
c) ¿Es cierto que para formar el doble de triángulos se necesita el doble de palillos?

d) Escribí una fórmula que te permita calcular cuántos palillos necesitás para armar una figura con ***n*** triángulos.

ACTIVIDAD 4

La propuesta ahora, es que resuelvas algunos problemas.Vas a encontrar preguntas similares a las planteadas en las actividades anteriores, recuperá tus estrategias al responder.

a) Te proponemos las siguientes figuras conformadas por cuadrados de fósforos



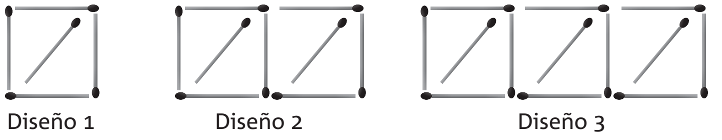
- ¿Cuál será el número de fósforos que corresponde a la figura que está en el quinto lugar? ¿Y en el décimo?

- ¿Cuál será el número de fósforos que formará la figura que está en el lugar 100?

b) Señalá cuál de las siguientes expresiones indica la cantidad de fósforos en función de las figuras:

$4 \cdot \boldsymbol{n}$ $\quad$ $4 \cdot \boldsymbol{n} + 1$ $\quad$ $4 + 3 \cdot (\boldsymbol{n} - 1)$ $\quad$ $3 \cdot \boldsymbol{n} + 1$

c) De la misma forma, podemos armar figuras agregando un fósforo en una de las diagonales del cuadrado.



- Si tenemos 169 fósforos, ¿podremos construir algún diseño?

- ¿Cuántos fósforos componen la figura que se encuentra en el lugar 10?

- ¿Qué expresión nos permite calcular la cantidad de fósforos para el diseño **n**?

d)

- ¿Cuántos puntos tiene el diseño 9?¿Y el diseño 21?

- Si tenemos 432 puntos, ¿corresponde a algún diseño? ¿a cuál?

- Alguien contó 230 puntos y afirma que corresponde al diseño 109, ¿es correcto?

- ¿Qué fórmula nos permite calcular la cantidad de puntos de acuerdo al número de diseño?

En estas actividades, que pueden originar diferentes expresiones algebraicas adecuadas para generalizar, nuevamente nos encontramos frente a la necesidad de validar la equivalencia entre las expresiones que surjan.

Esto puede realizarse, en general, a través de dos caminos:

- relacionando cada una con el contexto, es decir, argumentando con respecto a la manera en que fue construida la expresión, o
- validar una de ellas utilizando el contexto y manipulándola usando las propiedades para escribir las otras, y así, poder establecer si son o no equivalentes.

Insistimos, para poder completar este tipo de trabajo y garantizar cierta experiencia con las expresiones algebraicas equivalentes, se proponen las actividades que figuran a continuación. Tené presente que este tipo de tarea habilita ciertas herramientas para continuar con el trabajo de modelización matemática.

ACTIVIDAD 5

Completá usando la operación, el número o la expresión necesarios para obtener expresiones algebraicas equivalentes. En cada caso, explicá las razones de la elección.

Como ejemplo, va resuelto el punto a)

a) 5 (4 + x) = 20 + …

5 (4 + x) = 20 + 5x, ya que se aplicó la propiedad distributiva

b) 12 + 2 (4 + 2x) = 12 +…+…x

c) 5 - …3x = 5 - (2 - 3x)

d) 3 (2 - x) = 6 …3 x

e) (x + 7) (1 + x) = x +…+ 7 +…

f) …+ …= 7x - 3 + 8 - 2x

g) x - (2 - x) = x…2…x

h) 2x - (1 + x) =…- 1

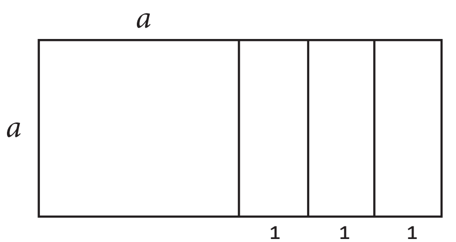
ACTIVIDAD 6

En esta actividad debés vincular, si lo considerás posible, cada expresión de la columna de la izquierda con otra equivalente de la columna de la derecha, copiando la expresión.

a) $5 + (2 - x)$		K) $x^2 + 25$
b) $9 - 4 (x + 2)$		L) $6 + 10 x$
c) $8 x - 2 x$		M) $3 x - 4$
d) $5 x - (4 + 2 x)$		N) $7 - x$
e) $5 (x - 1) + 8 x$		O) $1 - 4 x$
f) $(x + 5)^2$		P) $9 x + 20$
g) $(3 + 5 x)^2$		Q) $13 x - 5$
h) $(x + 4) (5 + x) - x^2$		R) $6 x$
		S) $x^2 + 10 x + 25$
		T) $(x + 5) (x - 5)$
		U) $x + 0,6$

ACTIVIDAD 7

Te damos la siguiente figura con las dimensiones que se indican:



a) Expresá la fórmula que represente el área de la figura de tres maneras distintas.

b) Teniendo en cuenta las tres expresiones a las que llegaste en el ítem anterior, calculá el valor numérico del área cuando *a* sea igual a 5 en cada una de las expresiones. ¿A qué conclusión llegás? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 8

Reunite con un compañero y respondan cada una de las cuestiones, escribiendo la manera en que acuerdan justificar cada una de las respuestas.

a) ¿Es cierto que para cualquier valor entero de **n** la expresión

$$3\,(n + 5) + 5\,(n - 3)$$

es múltiplo[8] de 8?

b) ¿Es cierto que para cualquier valor entero de **n** la expresión

$$n\,(3n + 5) - 3n^2 + 2$$

es múltiplo de 5?

c) ¿Es cierto que para cualquier valor entero de **n** la expresión

$$2n\,(n - 2) - 2n^2$$

da lo mismo que si lo reemplazamos en esta otra expresión:

$$4\,(n - 2) + 4?$$

ACTIVIDAD 9

Hay expresiones algebraicas que no son equivalentes pero que coinciden para algunos valores de x. Por ejemplo, $2x$ y $3x$ no son equivalentes porque si consideramos $x = 1$, la primera expresión toma el valor 2 y la segunda el valor 3.

Sin embargo, no podemos negar que para $x = 0$ las dos expresiones valen lo mismo.

a) Para saber para qué valores de x las expresiones $2x - 5$ y $3x + 2$ coinciden, Patricia pensó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 2x + x + 7 - 5 \\ &= 2x - 5 + x + 7 \end{aligned}$$

y dijo que las dos expresiones van a coincidir solamente cuando $x + 7 = 0$, es decir para $x = - 7$ ¿Es correcto el razonamiento de Patricia? ¿Por qué?

8. Recordá que un número a es múltiplo de otro b cuando existe algún número entero K tal que a = b K; en el caso de que a deba ser múltiplo de 8, debe cumplir que a = 8 K.

b) Usá el razonamiento anterior para encontrar para qué valor de x coinciden las siguientes expresiones:

$$4x + 3 \qquad \text{y} \qquad 3x - 3$$
$$4x + 3 \qquad \text{y} \qquad 3x + 3$$

1.1. Sobre razonamientos

A esta altura de la Unidad 2, puede resultar importante poner en evidencia el tipo de razonamiento matemático que ponemos en juego, por ejemplo, al argumentar cuándo una expresión algebraica es válida o al pasar de una expresión a otra.

En el diccionario es posible que encontremos que las palabras *inferir* y *deducir* son consideradas sinónimos. Sin embargo, en la vida cotidiana o en campos de conocimientos tales como las ciencias naturales, las ciencias sociales o la matemática, entre otros, esos términos adquieren significados muy diferentes.

La palabra *inferencia* se utiliza para hacer referencia tanto a razonamientos inductivos como a razonamientos deductivos. Pasamos a caracterizar tales formas de razonar.

A diario extraemos conclusiones generales mediante la observación de un número limitado de casos, en los cuales se reitera una característica común a todos: hemos realizado una *inferencia inductiva.* Sin embargo, la conclusión es válida solo si hemos verificado uno a uno todos los casos posibles, es decir si realizamos una *inferencia inductiva completa.*

Si no hubiésemos tenido a nuestro alcance todos los casos posibles, esa *inferencia inductiva incompleta* nos permite obtener una conclusión incierta referida a una característica de los casos observados, siempre que no hayan surgido ejemplos contraproducentes. Dicha conclusión es tanto más probable cuanto mayor sea el número de las reiteradas observaciones efectuadas.

Los razonamientos mediante inferencias inductivas incompletas son usuales no solo en la vida diaria, sino también en campos de conocimiento tales como las ciencias naturales, las ciencias sociales, las humanidades.

Pero las conclusiones surgidas por medio de inferencias inductivas (completas o incompletas) no son proposiciones *demostradas* en el sentido matemático del término. Podemos decir que han sido verificadas (en forma total o parcial, respectivamente).

En matemática la mayoría de las veces trabajamos con infinitos elementos, lo que hace imposible asegurar la validez de una afirmación mediante una verificación inductiva total. Además, en esta disciplina basta que un solo caso contradiga una conjetura para que sea considerada inválida, por lo que la inferencia inductiva no es una forma de prueba aceptada en los ámbitos de producción matemática.

Sin embargo, debemos tener en cuenta que el matemático conjetura propiedades antes de demostrarlas y que en el proceso de conjeturar se infiere inductivamente. Pero, para aceptar la validez de una conjetura, en esta disciplina es necesario, como dijimos en la Introducción, que sea probada mediante inferencias deductivas.

ACTIVIDAD 10

a) ¿A qué nos referimos cuando hablamos de conjeturas? ¿Podés dar algún ejemplo?

b) En las actividades anteriores, seleccioná ejemplos con los que puedas explicar alguno de los diferentes razonamientos.

c) Compartí tu trabajo con otros compañeros. ¿A qué conclusiones llegaron?

Para finalizar esta parte, te proponemos una última actividad, en la que también se trata de generalizar a partir de un modelo.

ACTIVIDAD 11

Al comienzo de la reunión mensual de la "Cofradía para la conservación de las Buenas Costumbres", los participantes se colocan en ronda y cumplen con el siguiente ritual:

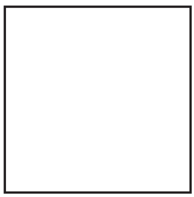
-saludan con un beso a las personas que tienen a cada lado

-dan un apretón de manos para saludar al resto de los participantes.

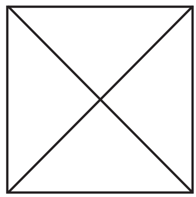
a) Si en el primer encuentro solo fueron 4 miembros, ¿cuántos besos y cuántos apretones se dieron?

b) El mes pasado participaron 6 y este mes fueron 9. Para el próximo, se espera que vayan 20. Calculen la cantidad de besos y apretones en cada caso.

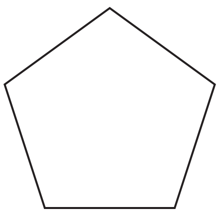
c) Buscá una manera de calcular la cantidad de besos y apretones para **n** participantes. Quizás pueda servir realizar un esquema.



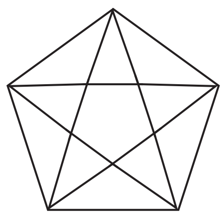
4 besos



2 apretones



5 besos



5 apretones

Puede ser útil tener en cuenta que las actividades de generalización se pueden organizar según se encuentren relacionadas con:

-la percepción de lo general (ver),

-descripción verbal (decir),

-expresión escrita, que incluyen los de expresión simbólica ($f_{(x)} = y$),

-aquellas que, después de escribir distintas expresiones para la generalización, se pudieran comprobar aplicando propiedades, que son equivalentes.

2. Funciones

En toda actividad matemática, tanto en la comunidad científica como en un grupo de estudio, están presentes formas propias de definir, explicar, probar, ejemplificar, generalizar, representar de otra manera, o alguna referencia a ellas, que pueden aparecer tanto en forma oral como escrita.

La posibilidad de comprender un texto implica poder interpretar lo leído en ausencia de quien lo escribió, lo que establece una diferencia esencial con la comunicación oral que permite el intercambio de los significados atribuidos a las expresiones utilizadas. Para que el significado atribuido por el lector sea admisible en términos de la cultura matemática, habrá que tener en cuenta que debe enfrentarse con diferentes tipos de expresiones y registros.

Por ello, a lo largo de las actividades te has encontrado que dimos especial importancia a las particularidades que adopta la lectura y la elaboración de textos en esta disciplina. Entre ellas, la interpretación de la información contenida en un gráfico y la escritura en lenguaje algebraico de fenómenos de cambio, es decir, aquellos en los cuales dos magnitudes se relacionen de manera de poder encontrar una expresión en lenguaje matemático que nos permita modelizarla.

En este apartado vamos a dedicarnos a estudiar las traducciones en estos registros, a partir de considerar el concepto de función.

Una función definida entre dos conjuntos de números reales, A y B, es una relación que asigna, a cada uno de los elementos *x* de A, uno y solo un elemento y de B.

La expresión $\boldsymbol{f}$: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ se lee "la función *f* definida de A en B".

Los dos conjuntos numéricos se asocian a dos variables. Los elementos "*x*" constituyen la variable independiente y los elementos "y", la variable dependiente.

La expresión $f(x) = y$ se lee "*f* de x es *y*". Decimos que y es la imagen de *x*, o que *x* es la preimagen de y a través de la función *f*.

Es importante tener en cuenta, entonces:

1° Condición de existencia: para cada elemento de A existe algún elemento que le corresponde en B, es decir, no puede haber elementos de A que no tengan su correspondiente en B a través de f.

2° Condición de unicidad: a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B a través de f.

Una función puede representarse mediante una tabla, una gráfica y, en muchos casos, mediante una fórmula.

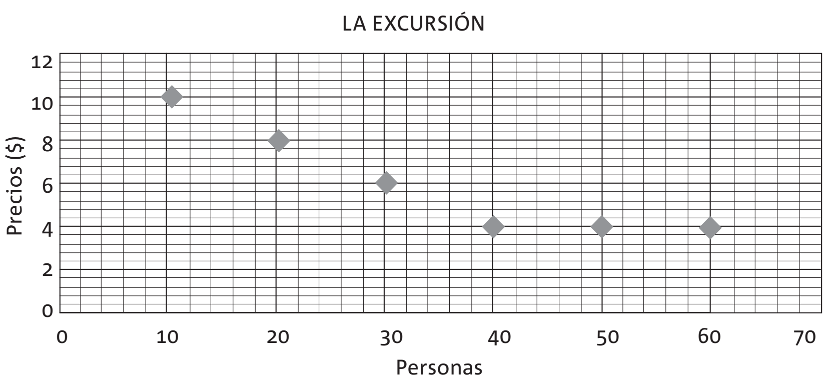
Para representar gráficamente una función, se ubican los valores de la variable independiente sobre el eje de abscisas y los de la variable dependiente, sobre el eje de ordenadas.

En toda $\boldsymbol{f}$: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, el conjunto A se llama dominio de la función (Dom $\boldsymbol{f}$) y el conjunto B se llama codominio.

El dominio está formado por todos los valores de la variable independiente para los que existe un valor de la variable dependiente. Cuando una función se define a través de una fórmula, $y = f(x)$, y no se menciona su dominio, se sobreentiende que está definida en su dominio natural, es decir, para todos los valores de x para los cuales es posible hallar $f(x)$ mediante su fórmula.

Se llama conjunto imagen de la función (Imf) a la parte del codominio que representa todos los valores de la variable dependiente.

ACTIVIDAD 12



Se va a organizar una excursión al Museo de Ciencias Naturales y el precio por persona va a depender del número de personas que vayan a dicha excursión. El número máximo de plazas es de 60, y el mínimo, de 10, admitiendo solamente grupos de 10 personas. La siguiente gráfica nos muestra la situación:

a) ¿Qué significado tiene el punto (20, 8)? ¿Y el (40, 4)?

b) ¿Por qué hemos dibujado la gráfica solo entre 10 y 60? ¿Podríamos continuarla?

c) ¿Qué representan para la función los valores comprendidos entre 10 y 60?

d) ¿Por qué no unimos los puntos?

e) ¿Entre qué valores oscila el monto que se va a pagar según la cantidad de personas?

ACTIVIDAD 13

Prestá atención a la siguiente situación.

a) Se trata de que escribas 3 o 4 preguntas que puedan responderse a través de la lectura del gráfico o que exijan realizar algunas inferencias.

Por ejemplo, *¿durante cuánto tiempo se tomaron los datos de la presión arterial del paciente?*

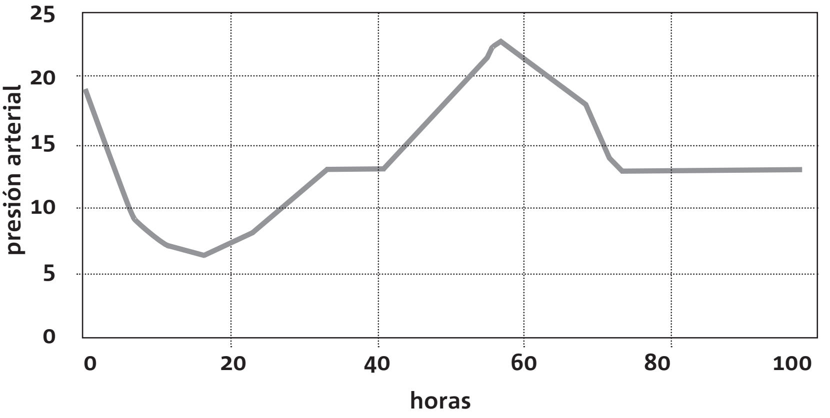
b) Intercambiá tus preguntas con las de otro compañero y respondé a las formuladas por él.

c) Entre todos, establezcan qué preguntas resultan más complejas y por qué.

Al ser internado un paciente en el hospital, una de las tareas a cargo de las enfermeras para dar cuenta de su estado es el control de la presión arterial de manera continua.

Dado que se trataba de un caso particular, el médico a cargo solicitó realizar un gráfico que muestre la evolución de la presión arterial máxima a partir del momento en que fue internado.[9]

9. Es bueno señalar que también se controlan los valores mínimos de presión. Pero este gráfico solo toma en cuenta los máximos.



3. Sobre diferentes registros

Resolver problemas es una condición necesaria pero no suficiente para estudiar matemática. No aprende lo mismo quien resuelve un problema esperando que el profesor indique si está bien o está mal, que quien resuelve y logra explicar cómo lo resolvió y por qué.

Al estudiar matemática, la resolución de un problema tiene que ser acompañada de una explicación que avale lo hecho, que permita explicitar las ideas sobre las que el procedimiento y las respuestas tienen validez. También es necesario poder escuchar las objeciones de los demás, porque ponen a prueba nuestra producción. Estos momentos de trabajo, vinculados con interpretar y comunicar, se oponen a una práctica de la matemática mecánica y poco fundamentada.

Debatir promueve la explicitación de los procedimientos utilizados, el análisis y la comparación entre las diferentes producciones. A su vez, facilita que mejoremos nuestras explicaciones a partir de los cuestionamientos de otros compañeros para poder defender el propio punto de vista. El pasaje de lo implícito a lo explícito permite nombrar el conocimiento, hacerlo público y, por ende, facilitar reconfirmarlo o modificarlo.

4. Funciones que pueden expresarse mediante una fórmula

Para modelizar procesos que crecen o decrecen uniformemente, así estos provengan de la matemática o de otra ciencia, es útil la idea de *función*.

Seguramente ya te has encontrado con funciones que pueden describirse mediante una fórmula y otras que no. La diferenciación entre estos tipos de funciones se puede establecer a partir de los datos que se dan y de un cierto conocimiento del fenómeno que se intenta modelizar.

Recordá que, *cuando las cantidades variables de dos magnitudes varían de modo tal que es posible determinar una de ellas a partir del valor de la otra, se dice que la primera es función de la segunda*.

ACTIVIDAD 14

Retomando la Actividad 3:

a) Si es posible, expresar la función que modeliza la situación.

b) Realizar el gráfico correspondiente a la situación.

ACTIVIDAD 15

A partir de la siguiente secuencia de figuras, responder:

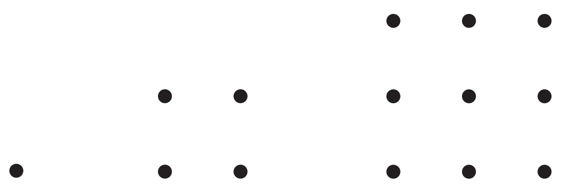


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 6? ¿y la 15?

b) Organizá una tabla donde puedan observarse las primeras 10 figuras.

c) ¿Podemos pensar que existe una figura que tiene 169 puntos? ¿Cuál es?

d) Expresar la fórmula y, si es posible, determinar una función que modelice la situación, indicando dominio, codominio e imagen.

e) Realizar un gráfico de la situación.

ACTIVIDAD 16

Volvamos a trabajar con temperaturas, pero esta vez, de una cantidad dada de agua. En un recipiente se calentó agua durante 1 hora y se observó cómo variaba la temperatura del agua a través del tiempo.

Algunos datos obtenidos se consignaron en la siguiente tabla:

Tiempo (en minutos)	0	10	20	30
Temperatura (en °C)	35	55	75	95

a) Realizá la gráfica correspondiente a la situación planteada.

b) Expresá la temperatura en función del tiempo mediante una fórmula y explicá cómo obtuviste dicha fórmula.

c) Se sabe que el agua se congela a 0 ºC y se evapora a 100 ºC. ¿Cómo condicionan estos datos a la función obtenida en b)?

d) Transcurridos 50 minutos ¿cuál es la temperatura del agua? Explicá por qué.

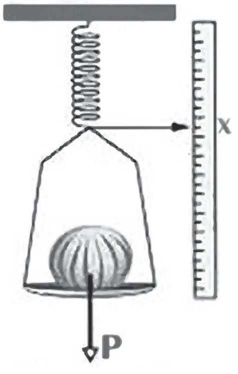
5. Funciones lineales

Entre las funciones que pueden darse por una fórmula, se encuentran las funciones lineales y para trabajar con ellas es necesario comprender los rasgos o características que las distinguen.

Por ejemplo, cuando se suspende un objeto de un resorte, el resorte se alarga. El alargamiento depende del peso del objeto, es decir, es función del peso.

En esta situación puede identificarse el peso como variable independiente y la longitud del alargamiento como variable dependiente.

A partir de resultados experimentales se ha comprobado que el alargamiento del resorte es directamente proporcional al peso del cuerpo que se suspende por lo que es posible calcular el alargamiento multiplicando el peso por una constante *k*.[10]



A partir de considerar la proporcionalidad entre el peso de un objeto que se suspende y la longitud del estiramiento del resorte, se construyó un instrumento que mide pesos, se denomina dinamómetro. Consiste en una escala en la que figuran los pesos de los objetos que se suspenden, es decir, se considera como variable dependiente la longitud del estiramiento y como variable independiente el peso del cuerpo.

Para poder ejemplificar las ideas matemáticas que estamos desarrollando, supongamos que contamos con un resorte en el que se pueden suspender cuerpos que no superen los 2 kg de peso, donde se realizaron las siguientes mediciones:

Peso del objeto (kg)	0, 050	0,250	0,400	0,600
Longitud del estiramiento (cm)	0,4	2	3,2	4,8

Si bien la información que puede proveer una tabla de valores es acotada y no anticipa el comportamiento de la función para valores que no se encuentran tabulados, las experimentaciones realizadas permiten determinar la fórmula correspondiente. Por ejemplo, si en este caso se designa con $\boldsymbol{x}$ a los valores que toma el peso y con $\boldsymbol{y}$ a la longitud del estiramiento, la fórmula que expresa esta función sería:

$$y = f(x) \text{ es } y = 8x$$

10. Puede resultarte útil, volver sobre lo visto en la Unidad 1, acerca de las funciones de proporcionalidad.

Según las características del resorte se pueden suspender cuerpos que no superen un peso determinado, por lo que también puede identificarse el *dominio* de esta función que estará dado por los números reales tales que $0 \leq y \leq 8$.

Si se quiere conocer la longitud del resorte estirado sabiendo que la longitud cuando no se suspende ningún cuerpo es de 10 cm, la fórmula correpondiente es

$$\boldsymbol{y = 8x + 10}$$

Si se consideran las mediciones anteriores puede confeccionarse la siguiente tabla:

Peso del objeto (kg)	0,050	0,250	0,400	0,600
Longitud del resorte (cm)	10,4	12	13,2	14,8

Dado que las fórmulas obtenidas son de la forma $y = mx + n$, es posible afirmar que los ejemplos analizados corresponden a situaciones de variación uniforme o lineal.

También puede analizarse si la razón entre la diferencia entre dos valores cualesquiera de la variable dependiente y la diferencia entre los correspondientes valores de la variable independiente es constante. Por ejemplo,

-En el primer caso: 2 - 0, 4/0,25 - 0,05 = 3,2 - 0,4/0,4 - 0,05 =…= 8

-En el segundo caso: 2 - 0, 4/0,25 - 0,05 = 3,2 - 0,4/0,4 - 0,05 =...= 8

Al trabajar en matemática con funciones, muchas veces los valores no provienen de mediciones. Por ejemplo, si se quiere saber qué números reales cumplen la condición $y = 8x + 10$, pueden proponerse números que carecen de sentido al considerar el caso del resorte. Es el caso de considerar valores negativos, cuando estamos trabajando con pesos y la escala que marca el estiramiento inicia en el 0.

X	-2	-1,5	...	3	3,5
Y	-6	-2	...	34	28

Al estudiar las funciones lineales intramatemáticamente, los valores de las variables tanto independiente como dependiente, pueden tomar cualquier número real. Por esto, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales y la imagen también es el conjunto de los números reales, ya que a partir de los valores del dominio pueden obtenerse todos los números reales.

Si en las funciones cuyo dominio y cuya imagen es el conjunto de los números reales se cumple que el cociente entre la diferencia entre dos valores cualesquiera de la variable independiente y la diferencia entre los correspondientes valores de la variable dependiente es constante, la función se denomina función lineal. En el ejemplo: 2 - 0, 4/0,25 - 0,05 = -16/-2 - 0,05 =…= 8

Otra manera de expresar la afirmación anterior es: en una función lineal, a incrementos iguales de una variable, corresponden incrementos iguales de la otra. Si se designa Δ[11] y al incremento de la variable dependiente y Δx al incremento de la variable dependiente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = constante = m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \Rightarrow y - y_0 = m\ (x - x_0)$$

Si se considera $x_0 = 0$, $y_0 = n$, reemplazando x_0 e y_0 se obtiene

$$y - n = m \cdot (x - 0) \Rightarrow y - n = m \cdot x - 0 \Rightarrow y = m \cdot x + n$$

que es la fórmula correspondiente a una función lineal.

ACTIVIDAD 17

Tratemos de aplicar estos conceptos, en una nueva situación contextualizada. Se cuenta con un silo cuya capacidad total es de 500 toneladas. Al momen-

11. La letra griega Δ (que se lee "delta") se utiliza en física para indicar aumentos o disminuciones, es decir, incrementos. Es importante tener en cuenta que los incrementos pueden ser positivos, negativos o nulos.

to contiene 25 toneladas de trigo, cuando se abre una compuerta que vierte en su interior 5 toneladas por minuto.

a) ¿Cuánto trigo hay en el tanque luego de 35 minutos? Registrá tus cálculos y completá la tabla.

Trigo (toneladas)				
Tiempo (minutos)				

b) ¿Existe una fórmula que permita calcular cuánto trigo hay en el silo, para distintos momentos? ¿Cuál es?

c) ¿Para qué valores del tiempo tiene sentido la expresión encontrada en el ítem anterior?

d) Graficá la situación planteada.

e) De acuerdo con el gráfico, respondé

- ¿Al cabo de cuánto tiempo el silo se llena?

-Transcurridas dos horas, ¿cuánto trigo hay en el silo?

ACTIVIDAD 18

El campo vecino cuenta con otro silo que tiene la misma capacidad que el anterior. Está totalmente lleno de maíz y se vacía a razón de 5 toneladas por minuto.

a) ¿Cuál será la fórmula que permite calcular la cantidad de maíz que queda en el silo en función del tiempo? Explicá tus respuestas.

b) ¿Para qué valores del tiempo tiene sentido la expresión encontrada en el ítem anterior?

c) Graficá la situación planteada.

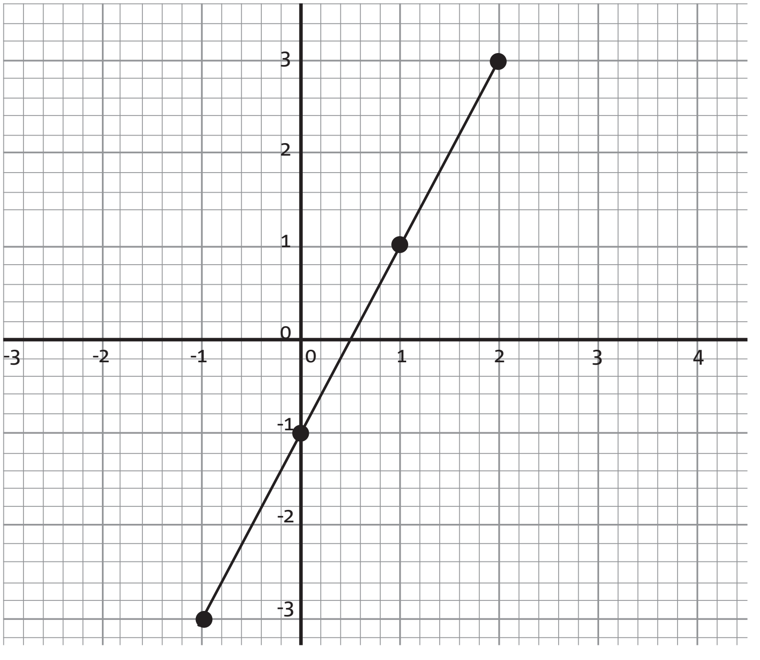
d) ¿Al cabo de cuánto tiempo el depósito queda vacío?

6. Gráficas cartesianas de funciones lineales

La representación gráfica de las funciones lineales es siempre una recta.[12] Esto hace que baste tomar dos puntos para poder representar la función.

Por ejemplo, si se considera la función $f_{(x)}$ cuya fórmula es $f(x) = 2x - 1$ para realizar la gráfica, basta tomar los puntos

A = (0; -1) y B = (1; 1)



Todo otro par de valores que cumpla con la condición de $f(x) = 2x - 1$ pertenece a la misma recta.

---

12. Para probar que la gráfica de una función lineal es una línea recta puede utilizarse el siguiente argumento:
Si (x; y) es un punto de la gráfica $f_{(x)} = 2x + 1$ y x=0, se obtiene que $y = f_{(0)} = 1$

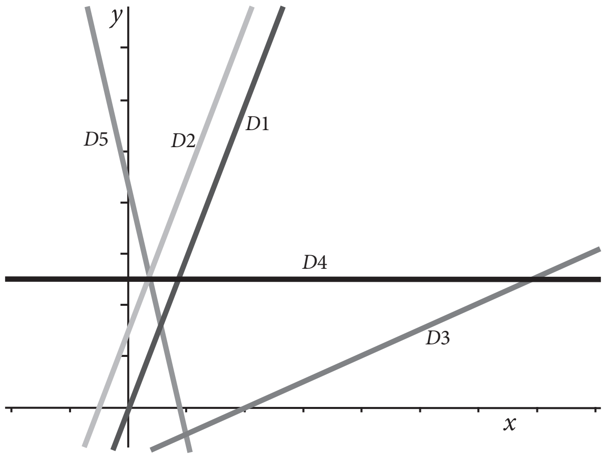
Las rectas D1,…, D5 representan distintas funciones lineales, cuyas fórmulas son:

$$y = a_1\,x + b_1, \ldots, y = a_5\,x + b_5$$

a) Ordenar los números $a_1, \ldots, a_5$ por orden creciente.

b) Ordenar los números $b_1, \ldots, b_5$ por orden creciente.

c) Registrá los argumentos que usaste para resolver la actividad. Compará tus argumentos con los de otros compañeros.



7. Tablas, gráficos y fórmulas

Como ya señalamos, al estudiar una función o tener que anticipar un valor en una variación, se pueden utilizar distintos registros: tablas de valores, gráficos o fórmulas.

En el caso particular de una función lineal, el análisis de los valores constantes de la fórmula permite vincular gráficas con fórmulas correspondientes a funciones lineales y también facilitar la representación de estas últimas.

Si se considera la fórmula $y = mx + b$, el número m que es la constante de la variación, se denomina *pendiente* de la recta y determina la inclinación de esta. En tanto que el número *b* se denomina la *ordenada al origen* y es el valor sobre el eje y por donde pasa el gráfico de la recta. Es decir, *b* es el valor que toma la función para x = 0.

En general, en una función lineal $f{:}R \rightarrow R$, $f(x) = m.x + b$, *con a y b* $\in R \neq 0$

Si $m > 0$, la recta crece;

si $m < 0$, la recta decrece, y

si $m = 0$, la recta no crece ni decrece.

Si se considera que $\Delta x = 1$, la pendiente puede ser interpretada como el incremento de la variable independiente, lo que permite graficar una función lineal conociendo un punto de su gráfica y la pendiente m.

La idea de pendiente debe ser considerada desde diferentes formas:

-de acuerdo con el lugar que ocupa en la fórmula;

-como constante que resulta del cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

-en relación con el dibujo de la recta, ya que es una medida de la inclinación de esta.

ACTIVIDAD 20

En un pueblo A, la boleta de gas se factura a razón de $1,5 el metro cúbico. En el pueblo B, la boleta de gas se factura a razón de $1,2 el metro cúbico más $50 de abono fijo.

Primeras preguntas:

a) Si se consumen 120 metros cúbicos, ¿cuál es el valor de la boleta en el pueblo A? ¿Y en el B? ¿Y si se consumen 170 metros cúbicos?

b) José y Carlos viven en el pueblo A. José consume el doble de metros cúbicos que Carlos. ¿Es cierto que debe pagar el doble?

c) Juana y Carla viven en el pueblo B. Juana consume el doble de metros cúbicos que Carla y dice que no paga el doble. ¿Será cierto?

d) ¿Qué cantidad de metros cúbicos consumió Claudio en el pueblo B si pagó $230?

e) Dos personas gastaron la misma cantidad de dinero en gas, viviendo uno en el pueblo A y el otro en el pueblo B, usando la misma cantidad de metros cúbicos. ¿Es posible?

f) ¿Cuánto gas consumieron y cuánto gastaron?

Otras preguntas:

g) Para resolver algunas de estas preguntas, un compañero decidió hacer un gráfico. ¿Cuál es tu opinión respecto a esta decisión? ¿Por qué?

h) En tanto, otro decidió buscar la fórmula que expresa cada una de las funciones. Encontrá las fórmulas.

i) ¿Cuál es el registro que te resulta más adecuado? ¿Por qué?

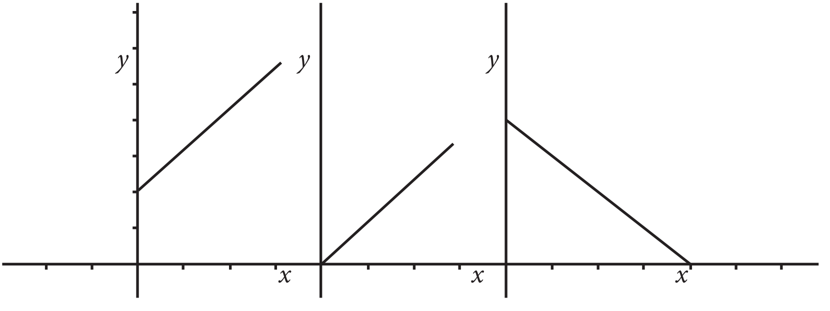
j) Para finalizar, expresá en tu hoja los tres tipos de registros vistos (tabla, fórmula, gráfico).

ACTIVIDAD 21

En las salas de un hospital público del Conurbano Bonaerense hay tubos de oxígeno cuya capacidad es 680 litros. Si los tubos están siempre llenos y cuando comienzan a utilizarse se vacían a razón de 10 litros por minuto,

a) ¿cuál es la función que expresa la cantidad de oxígeno que queda en el tubo en función del tiempo?

b) ¿cuál de los siguientes gráficos se ajusta a la situación planteada?



x, representa el tiempo desde que comenzó a salir el oxígeno del tubo.

y representa la cantidad de litros que va quedando en el tanque según el tiempo transcurrido.

ACTIVIDAD 22

A Lorenzo le han regalado un auto a pilas que viaja a velocidad constante y una pista sobre la cual se desplaza. Mientras Lorenzo juega, su hermano mayor, Nicolás, que estudia física y es muy aplicado, realiza mediciones y las apunta en su libreta

Tiempo de marcha (seg.)	Distancia al inicio de la pista (cm)
10	65
15	90
25	140

a) ¿A qué distancia del inicio de la pista largó Lorenzo el auto?

b) ¿A qué distancia del inicio de la pista llegó el auto a los 20 segundos. de marcha?

c) ¿Cuántos cm recorrió el auto en 20 segundos.?

d) ¿Cuál es la velocidad del auto?

e) ¿Cuánto tiempo tardó en estar a 60 cm del inicio de la pista?

ACTIVIDAD 23

Juan ha puesto en un local de su vivienda una remisería y en un cartel puede leerse el siguiente cuadro:

Viajes hasta 15 km: \$2 el km más \$1,5 de cargo fijo Viajes de más de 15 km: \$1,8 el km

a) ¿Cuál es la fórmula que permite obtener el precio de un viaje en función de la distancia recorrida?

b) ¿Cuánto cuesta un viaje de 8 km con un remís de la empresa?

c) Si un pasajero pagó \$26,10 ¿qué distancia recorrió?

ACTIVIDAD 24

Un submarino que se encuentra a 2.000 metros de profundidad comienza a moverse hacia el fondo del mar. Durante la primera hora desciende cierta cantidad de metros; durante la segunda hora, desciende el doble que en la primera hora; en la tercera hora desciende 300 metros y se queda en los 8.000 metros de profundidad.

a) ¿Cuántos metros descendió en la primera hora?

b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones podrían colaborar en la resolución de este problema? ¿Por qué?

$2.000 - x - 2x - 300 = 8.000$

$2.000 + 3x + 300 = 8.000$

$2.000 + x + 2x +300 = 8.000$

$2.000 - 3x - 300 = 8.000$

8. A modo de cierre

La Unidad 2 consta de dos partes, la primera toma el trabajo con expresiones algebraicas, en tanto la segunda aborda las funciones en cuanto al contenido matemático.

Entonces, iniciamos el trabajo con expresiones algebraicas para poder abordar algunas situaciones intramatemáticas que nos habiliten a poner en evidencia, a través de generalizaciones, cierta característica de distintos tipos de razonamientos, indispensables para poder comunicar y validar las estrategias de resolución.

Avanzamos en el trabajo, usando distintos registros de las funciones, tomando el caso de la función lineal como ejemplo para su estudio. Tablas de valores, gráficas y expresiones algebraicas, fórmulas, pusieron estas ideas en tensión para su estudio.

A lo largo del recorrido propuesto, las actividades asociadas a estos contenidos intentaron proponer un tratamiento más sistemático de la noción de variable, parámetro y dependencia, caracterización de dominios o conjuntos de definición, y los distintos registros ya mencionados, preparando el trabajo para la elaboración de modelos matemáticos simples de explicación de fenómenos.

ACTIVIDAD 25

En esta actividad te proponemos que reflexiones acerca de tu desempeño en relación con las siguientes cuestiones.

a) ¿Interpretaste la información contenida en los distintos registros?

b) Al avanzar con los textos teóricos, ¿lograste comprenderlos desde el primer intento?

c) ¿Pudiste operar algebraicamente y obtener resultados razonables?

d) ¿Qué considerás necesario seguir trabajando?

Para leer, después de todo…

El matemático, el físico, el ingeniero y el médico

Al matemático le gusta contar una anécdota referida a tres de sus colegas.
Dice el matemático: —El físico está convencido de que 60 es divisible por todos los números, porque ve que 60 es divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Para verificarlo, toma algunos otros números al azar, por ejemplo 10, 15, 20, 30. Como 60 también es divisible por estos, estima que los datos experimentales son suficientes.
Dice el físico: —Sí, pero miren al ingeniero. Sospecha que los números impares son primos. En todo caso, el 1 puede ser considerado como primo. Después vienen el 3, el 5 y el 7, que son indudablemente primos. A continuación viene el 9 que, en apariencia, no es un número primo. Pero el 11 y el 13 sí que lo son. Entonces, dice el ingeniero:

“Volvamos a considerar el 9... Debo concluir que se trata de un error en el experimento”.

Dice el ingeniero: —Es verdad, pero fíjense en el médico. Permite que un enfermo desahuciado de uremia coma puchero y el enfermo se cura. El médico escribe un artículo científico afirmando que el puchero cura la uremia. A continuación, le da puchero a otro urémico y este fallece. Por lo tanto, el médico corrige los datos: “el puchero es aconsejable en el 50% de los casos”.

Khurguin, Ya. (1974). *Did you say mathematics?* Moscú: Mir, pp. 123-124. Traducción Edunpaz.

Unidad 3

Son sólidas las razones que sostienen la enseñanza de los contenidos que abordaremos en esta unidad: la utilidad de la estadística y de las probabilidades en la vida diaria, su papel instrumental en otras disciplinas, la necesidad de un conocimiento vinculado con el estudio de sucesos ligados a lo aleatorio en el ejercicio de la ciudadanía, el papel de la estadística en el desarrollo de un pensamiento crítico.

Hoy la estadística se utiliza para describir los valores de datos económicos, sociales, biológicos o físicos y sirve para relacionar, analizar e interpretar dichos datos. A su vez, el desarrollo de la teoría de la probabilidad, en el siglo XIX, aumentó las aplicaciones de la estadística pues el cálculo de probabilidades permite analizar la confiabilidad de los estudios estadísticos y determinar la cantidad de datos necesarios para realizarlos.

Sin embargo, es probable que no hayas trabajado con estos contenidos durante el paso por tu escolaridad primaria y secundaria. Por lo que nos proponemos orientar la tarea hacia el análisis exploratorio de datos, centrándonos en las aplicaciones y mostrando su utilidad a partir de áreas diversas. Se trata de introducir el trabajo de esta rama matemática, presentando las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recolección y análisis de datos, obtención de conclusiones sobre el problema planteado.

ACTIVIDAD 1

a) Analizá cada una de las siguientes situaciones y respondé a las preguntas en una hoja.

b) Discutí tus respuestas con otros compañeros y registrá los acuerdos o desacuerdos a los que arriben.

- El pronóstico meteorológico anuncia para nuestra localidad que hay 30% de probabilidades de lluvia para el sábado y 70% de probabilidades de lluvia para el domingo. ¿Esto significa que es seguro que lloverá el fin de semana?
- Algunas estadísticas muestran que muchos accidentes de tránsito se producen a menos de 140 kilómetros por hora. ¿Significa esto que es más seguro conducir a gran velocidad?
- En un trabajo estadístico de 2002 se informa que el 61% de las víctimas de los accidentes de tránsito fueron varones y el 39% mujeres. ¿Significa esto que las mujeres tienen menos probabilidades de sufrir un accidente de tránsito que los varones?
- Las últimas estadísticas afirman que el número de matrimonios es el doble que el de divorcios. ¿Se puede afirmar entonces que uno de cada dos matrimonios se divorcia?
- Si en un juego de generala sale generala servida de 6. ¿Se puede afirmar que es poco probable que salga un 6 en el siguiente tiro?

1. Estadística

Ya hemos mencionado que, desde la Antigüedad, aún antes del 3000 a.C, existen registros de **datos** numéricos. Podemos mencionar que los babilonios y los egipcios ya analizaban datos de población y, en el 600 a.C., los griegos realizaban censos cuya información se utilizaba para cobrar impuestos, práctica que el imperio romano extendió a todos los territorios que conquistaba.

El vocablo censo proviene del latín *census*, que era un registro en el que los jefes de las familias romanas debían inscribirse, anotar a las personas que componían su familia y sus bienes. Este registro debía actualizarse cada cinco años y servía para conocer la población de Roma y la fortuna de los ciudadanos.

El emperador Augusto –contemporáneo de Cristo– mandó realizar una gran encuesta sobre las riquezas y demás posesiones del Imperio Romano. Al final de meses de trabajo tuvo que contentarse con una enumeración sistemática y ordenada de datos, ya que hasta comienzos del siglo XVII era la única manera de dar cuenta de la información solicitada, es decir, de forma meramente descriptiva.

Se puede afirmar que la estadística estudia las mejores formas de registrar y analizar datos, a partir de los cuales establece conclusiones. En el siglo XIX, los investigadores de distintas ramas de la ciencia contribuyeron a profundizar las ideas básicas de la estadística para estudiar los fenómenos de las ciencias naturales y sociales, brindando herramientas para el diseño de experimentos y la toma de decisiones sobre los fenómenos estudiados.

Entonces, podemos decir que la estadística es una rama de la matemática que se ocupa de reunir, organizar y analizar datos numéricos para facilitar la toma de decisiones en ámbitos económicos, políticos y sociales muy diferentes.

Antes de ponernos a trabajar, vamos a revisar tres aspectos importantes:

I. ¿Cómo se describe de la mejor manera la muestra estudiada?

Los datos, la información obtenida a través de diferentes dispositivos, hay que ordenarlos, agruparlos y determinar ciertos números –parámetros– que describan la muestra en forma clara. Este es el objetivo que se plantea la denomina *estadística descriptiva*.

II. En función de la información obtenida, ¿qué conclusiones se pueden deducir o inferir sobre la totalidad del colectivo en cuestión y no solo sobre la muestra?

Este tipo de cuestión es abordada por tareas en las que se emplea la *inferencia estadística,* que en la actualidad posee un fuerte sostén matemático basado en la Teoría de la probabilidad.

III. ¿Cómo se deben considerar las muestras y cómo se seleccionan para que proporcionen información confiable sobre el colectivo que se desea indagar? Esta problemática corresponde a la parte de la estadística que se conoce con el nombre de *diseño de experimentos.*

Los conceptos básicos que debés conocer son

POBLACIÓN
Es el conjunto de personas, animales, objetos, lugares, etc. sobre los que se estudia determinada característica

INDIVIDUO
Es cada integrante de la población

VARIABLES ESTADÍSTICAS
Son los datos o características que son objeto de estudio de una población

MUESTRA
Es un subconjunto representativo de la población, elegido al azar

CUANTITATIVAS
Son aquellas variables que admiten cuantificación, pueden ser contadas.
Ej: Altura, Peso, Cantidad de Hijos, Calificaciones, etc.

CUALITATIVAS
Son variables a las que no podemos asignar un valor numérico.
Ej: Sexo, Profesión, Color de Piel, etc.

DISCRETAS
Son aquéllas que solo pueden tomar valores enteros, por ejemplo: Número de Hermanos, Cantidad de Libros de una Biblioteca.

CONTINUAS
Son las que pueden tomar valores intermedios entre dos enteros, ejemplos son: Altura, Peso, Dinero depositado en una cuenta, etc.

Un primer paso de un estudio estadístico es determinar qué y cuánta información hay que reunir pues, en muchos casos, hay que realizar encuestas, registrar observaciones, realizar experiencias de laboratorio que involucran mediciones, registrar datos de archivos, etc.

Otro elemento para destacar: un experimento es una operación que puede conducir a varios resultados posibles. Estos resultados posibles constituyen el *llamado espacio muestral del experimento*.

Vamos a explicar el esquema anterior, partiendo de considerar que el conjunto de *individuos* cuyas características se quieren estudiar se denomina *población*. Si la población que interesa estudiar es muy numerosa, el proceso de obtención de información es complejo o caro, o se desea tener información rápidamente, solo se recogen los datos de una parte de esa población que se toma como muestra. Para seleccionarla es importante considerar su tamaño y cómo se eligen sus elementos para que sea representativa, ya que las características de la población se van a determinar analizando las características de esa muestra.

Por ejemplo, si se estudia el estado de salud de los niños menores de 6 años de una ciudad de 50.000 habitantes, tomar 100 casos no sería suficiente y las conclusiones variarían si los niños de la muestra fueran todos menores de un año o vivieran en una zona de riesgo sanitario. El peso y la estatura son variables que interesa registrar y las medidas que se obtengan serán los datos.

Se llama *variable* a aquella característica de los individuos de una población que interesa determinar y el valor o medida que toma la variable para cada individuo de la muestra es un dato. Si los individuos de la muestra se eligen al azar se dice que la muestra es *aleatoria*.

Los datos recogidos a través de encuestas, observaciones o experiencias, se organizan de modo que su interpretación sea más rápida y clara. Dependiendo del tipo de variable que interesa analizar, los datos pueden ser numéricos o no.

Si los valores o medidas de una variable se expresan con números, esta se denomina *variable cuantitativa*. Si estos son números enteros la *variable es discreta* y si entre dos valores de la variable siempre existe otro valor posible es *continua*. La variable se denomina *cualitativa* si se expresa con palabras. Por ejemplo, la profesión es una *variable cualitativa*, mientras que la cantidad de hijos de una familia o el peso de una pieza de metal son *cuantitativas*.

Más allá de tus primeras respuestas, la propuesta es avanzar acercándote los métodos de estudio y análisis propios de la estadística.

1.1. Interpretación de la información

Cuando se investiga un problema que interesa estudiar y se obtiene un conjunto grande de datos, es necesario trabajar con ellos para elaborar información que permita tomar decisiones.

ACTIVIDAD 2

Para ampliar los conocimientos que se tenían sobre el desarrollo poblacional y las consecuencias de los movimientos migratorios, en 1869 se realizó el primer Censo Nacional en la Argentina. Consideren la información de la tabla, que muestra algunos indicadores demográficos entre 1869 y 1991,[13] para responder a las preguntas en una hoja.

AÑOS	PORCENTAJE DE		ESPERANZA DE VIDA AL NACER	TASA GLOBAL DE FECUNDIDAD	PORCENTAJE DE EXTRANJEROS EN LA:	
	ANCIANOS	JÓVENES	(EN AÑOS)	(HIJOS/ MUJER)	POBLACIÓN TOTAL	POBLACIÓN ANCIANA
1869	2,2	42,8	32,9	6,8	12,1	17,1
1895	2,5	40,3	40,0	7,0	25,4	27,1
1914	2,3	38,4	48,5	5,3	29,9	51,0
1947	3,9	30,9	61,1	3,2	15,3	56,6
1960	5,6	30,8	66,4	3,1	13,0	49,3
1970	7,0	29,3	65,6	3,1	9,5	39,6
1980	8,2	30,3	68,9	3,3	6,8	25,2
1991	8,9	30,6	71,9	2,9	5,0	15,9

13. Información extraída de la publicación *Estructura demográfica y envejecimiento en la Argentina*. Serie Análisis Demográfico Nº 14. INDEC. En el mismo, se considera como ancianos a las personas mayores de 65 años y jóvenes al grupo etario de 16 a 26 años.

a) ¿Qué indicadores crecieron en estos años? ¿Cuáles decrecieron? ¿A qué creés que se debe esa evolución?

b) ¿En qué período considerás que llegaron más extranjeros a la Argentina? Podés confirmar tu decisión consultando alguna otra fuente.

c) De la información obtenida en el censo 2001 puede obtenerse un nuevo valor para la "esperanza de vida al nacer", ¿entre qué valores piensan que podría estar? ¿Por qué?

Si pueden, verifiquen su estimación.

d) ¿Cuáles podrían haber sido las preguntas realizadas en el censo que dieron lugar a esta información?

ACTIVIDAD 3

I. Para establecer algunas relaciones entre los resultados de los censos nacionales y las características de la comunidad de la universidad es necesario recolectar alguna información.

a) En todas las universidades se realizan investigaciones acerca de los estudiantes ingresantes. Para ello se requiere analizar algunas variables como las que se muestran en la siguiente tabla.

Completar la tabla con los datos de tus compañeros de clase.

Orden	Sexo	Edad	Estatura	Carrera	Cantidad de hijos	Cantidad de hermanos	Nacionalidad	Partido de residencia	Trabaja Sí/No	Cantidad de materias pendientes

b) Clasificar las variables que aparecen en la tabla en: cualitativas o cuantitativas, discretas o continuas.

c) ¿Cuál es la cantidad de hermanos que aparece más frecuentemente, incluyéndote ? ¿Y con menos frecuencia?

d) Pensás que las mamás de tus compañeros de clase, ¿tienen más o menos hijos que las madres que respondieron al censo en 1869? ¿Y en 1960? ¿Por qué?

e) Considerás que si hubieran realizado la encuesta a sus abuelas, preguntándoles cuántos hijos tuvieron sus madres, ¿hubieran obtenido los mismos resultados? ¿Por qué?

Antes de continuar

II. Respondé

a) ¿Cuál es la diferencia entre analizar los valores obtenidos en un censo nacional y los obtenidos en la encuesta realizada en la actividad 3?

b) ¿Pensás que la muestra utilizada para realizar la encuesta es representativa de la población de todas las familias de la universidad? ¿Por qué?

2. Organización y representación de datos

Para cada medida de la variable en estudio, se registra el número de individuos que tomaron ese valor, o intervalo de valores, en una tabla de distribución de frecuencias.

Por ejemplo:

Número de hijos	Frecuencia
0	25
1	28
2	49
3	13
4	30
5	5
Total	

En esta muestra de 150 familias, 25 de los entrevistados no tienen hijos, 28 tienen uno solo, 49 tienen dos, etc.

Esta organización permite identificar los valores máximos y mínimos que toma la variable, su diferencia y cuál es el valor más frecuente. Si se necesita comparar las frecuencias para distintos valores de la variable en relación con el total de datos de la muestra, es posible calcular las frecuencias relativas.

El cociente entre la frecuencia para un valor de la variable y el número total de datos se denomina *frecuencia relativa*. Esta razón, que puede expresarse como un porcentaje, muestra en qué proporción se repite cada dato con respecto al total. Por ejemplo, en el caso de la muestra anterior, el 32,7% de las familias tienen 2 hijos.

ACTIVIDAD 4

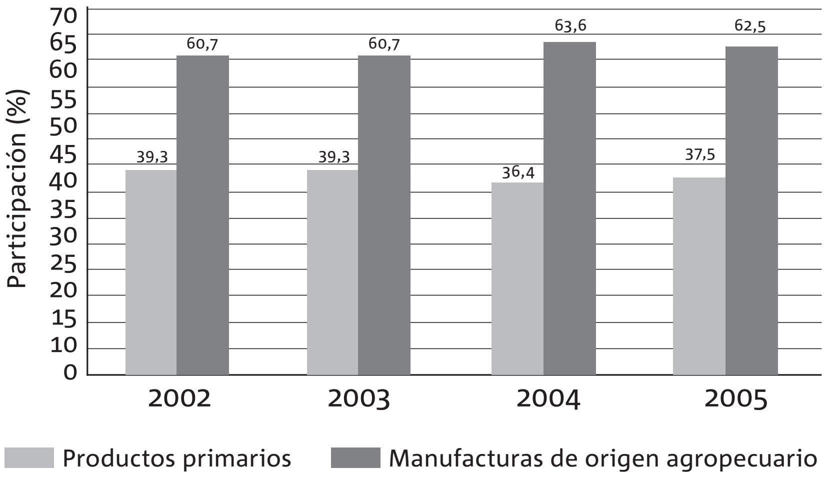
Antes de continuar, ¿cómo se llega a determinar que el 32,7% de las familias tienen 2 hijos? No olvides registrar tus cálculos.

3. Distintos tipos de gráficos

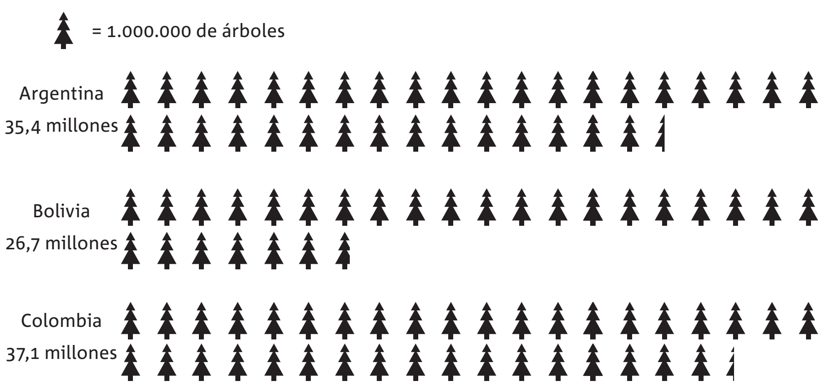
Para comunicar la información obtenida y realizar un análisis más rápido de los datos, es común construir distintos tipos de gráficos. En los medios de comunicación es frecuente encontrar representaciones que permiten entender con un golpe de vista la información que se quiere transmitir. Pero en esos casos es importante analizar con cuidado dicha representación ya que el uso que se haga de la escala puede dar lugar a interpretaciones erróneas.

Los gráficos de barras se utilizan para representar variables cualitativas o cuantitativas. En ellos, la altura de cada barra es proporcional al valor de la variable o a la frecuencia correspondiente. Este tipo de gráficos también permite visualizar la evolución de un fenómeno durante un cierto período de tiempo.

Composición de las exportaciones agroindustriales

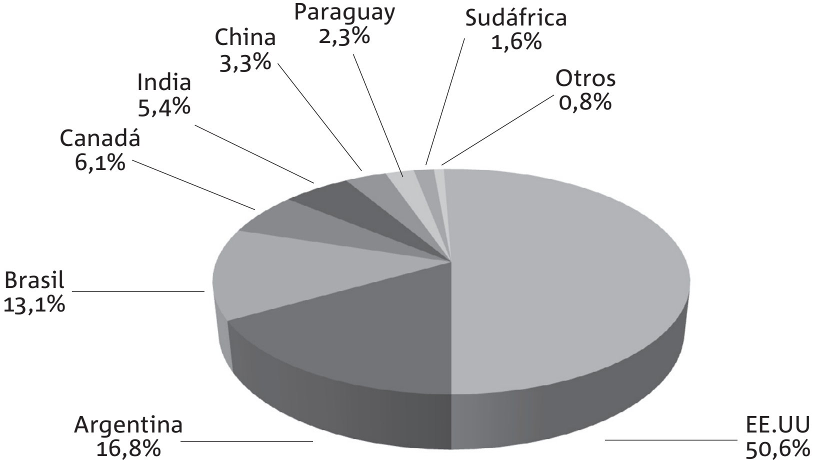


En un pictograma se utilizan imágenes alusivas a la información que se presenta, las que se repiten o agrandan proporcionalmente a los valores que representan. En general, estos gráficos son poco precisos.



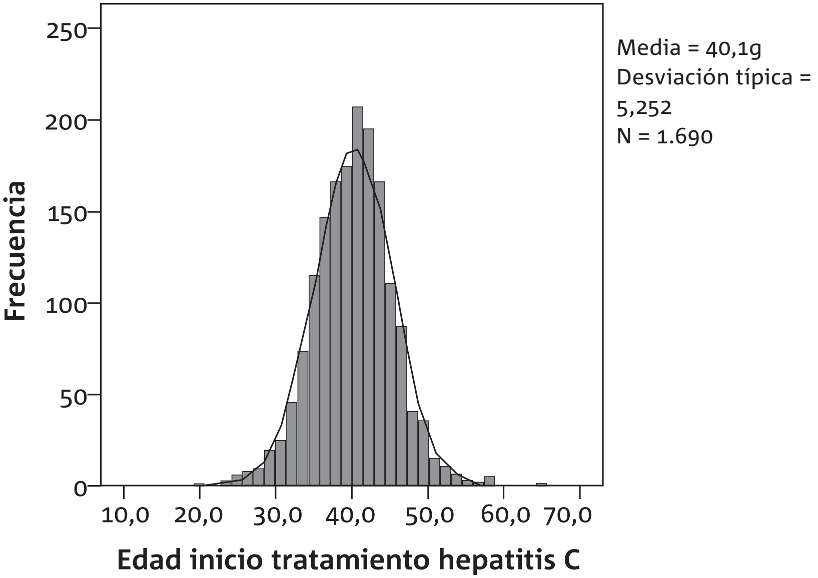
En los gráficos de sectores, el ángulo central de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente. Este tipo de gráficos es adecuado para realizar comparaciones entre las partes y el total o entre situaciones similares representadas con círculos de igual diámetro.

Área global de cultivos transgénicos, por país (sobre 114,3 millones de hectáreas)



Otros: Uruguay, Australia, México, Rumania, Filipinas, España, Colombia, Chile, Honduras, Portugal, Alemania, Francia, República Checa, Eslovaquia, Polonia.
Fuente: ISAAA, 2007

Los histogramas se usan para representar variables cuantitativas continuas, o discretas cuando toman muchos valores, lo que lleva a agrupar los datos en clases. Cada clase, se representa con un rectángulo de área proporcional a la frecuencia correspondiente.



ACTIVIDAD 5

Las notas que obtuvieron los alumnos en una evaluación de matemática en 1° año del bachillerato fueron las siguientes: 5-3-4-1-2-8-9-8-3-6-5-4-1-7-2-1-9-5-10-1-8-3-8-3-2.

a) Realizá la tabla adecuada a dichos datos con las frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.

b) Construí el gráfico más adecuado para representar dicha situación.

ACTIVIDAD 6

Las edades que se registraron en un grupo familiar fueron las siguientes: 3-2-11-4-3-2-4-5-6-7-3-4-22-4-5-3-2-5-6-27-15-4-21-12-4-5-3-6-29-13-6-17-6-13-6-5-12-26-12.

a) Construí la tabla estadística de datos agrupados.

b) Construí un gráfico adecuado a la situación.

ACTIVIDAD 7

a) Seleccioná alguno de los gráficos del texto que sigue y explicá la información que contiene.

b) Buscá distintos gráficos estadísticos en la prensa escrita, indicá de cuál se trata e identificá sus características.

Antes de continuar,

c) Investigá a qué se denominan parámetros de posición central. ¿A qué refieren los términos: media, mediana y moda?

ACTIVIDAD 8

La Encuesta Permanente de Hogares (EPH) es un programa nacional cuyo propósito es el relevamiento sistemático y permanente de los datos referidos a las características demográficas y socioeconómicas fundamentales de la población, vinculadas con la fuerza de trabajo. Su temática está orientada hacia la caracterización de la situación social integral de los individuos y los hogares, aunque los datos más difundidos son los relacionados con el mercado laboral.

En este sentido, la Encuesta Permanente de Hogares Continua pretende conocer y caracterizar la situación de las personas y de los hogares (por ser estos los núcleos básicos de convivencia en donde los individuos se asocian) según su lugar en la estructura social.

Para uno de los fines de la EPH se entrevistaron 1.000 familias de la ciudad de Mendoza para saber cuántos hijos tiene cada familia. Los datos obtenidos fueron: 250 familias no tienen hijos, 200 tienen 1 hijo, 300 tienen 2 hijos, 160 tienen 3 hijos, 50 tienen 4 hijos, 20 tienen 5 hijos, 10 tienen 6 hijos, 7 tienen 7 hijos, 2 familias tienen 8 hijos y una familia tiene 9 hijos.

a) Organizá esta información y determiná la moda, la mediana y el promedio (media aritmética) de esta muestra.

b) ¿Cuál de estos parámetros te parece más representativo de la situación? ¿Por qué?

4. Análisis de datos

En algunos casos, frente a un conjunto de datos es suficiente con organizarlos para extraer conclusiones. En otros, resulta útil resumir las características de la muestra estudiada para compararlas con otras. Así, en estadística, se trabaja con algunos números llamados medidas de posición o medidas de tendencia central, que describen cómo se ubican, distribuyen o posicionan los datos de una muestra.

Por ejemplo, en el caso del estudio de salud de los niños de una cierta localidad, interesa conocer, para cada edad, si las medidas de los pesos se ubican alrededor de un valor u otro. Sin embargo, calcular el **promedio** (media aritmética) de estas medidas no sería suficiente ya que si hay niños con sobrepeso y otros desnutridos, estos valores podrían compensarse. Así, es necesario conocer, además, si hay una medida que se repite con mayor frecuencia y cómo se distribuyen esos valores.

La **moda** es aquel valor de la variable que aparece con mayor frecuencia en la distribución.

Por ejemplo, en el caso de la tabla presentada en el apartado 2. Organización y representación de los datos, la moda es 2 hijos.

En tanto, la **mediana** de un conjunto de medidas es un valor que divide a este conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, en dos grupos que tienen la misma cantidad de elementos. Si la muestra tiene un número impar de valores uno de ellos queda en el centro y es la mediana. Si el número de datos es par, se toma el promedio de los dos datos centrales. En el caso del ejemplo recién considerado de la distribución de frecuencias, como son 150 datos no es necesario ordenarlos, basta encontrar cuáles son los datos que se encontrarían en las posiciones número 75 y 76 y hacer el promedio que, en este caso, es 2.

Nº de orden	1	2	3	...	25	26	27	...	53	54	55	...	75	76	77	...	102	103	...
Cantidad de hijos	0	0	0	0	0	1	1	...	1	2	2	...	2	2	2	...	2	3	...

La **media aritmética** de un conjunto de datos es la suma de dichos valores, dividida por el número de datos en el conjunto. Por ejemplo, si los datos corresponden a una variable discreta como en la tabla de frecuencias se calcula así:

$$\mathit{Media} = \frac{0 \cdot 25 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 49 + 13 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{150} = \frac{310}{150} = 2{,}067$$

En este caso, como se trata del número de hijos, el valor se aproxima a 2.

En general, se anota

$$\text{media} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i}$$

donde $\boldsymbol{x_i}$ es cada valor de la variable y $\boldsymbol{f_i}$ la frecuencia correspondiente, el signo Σ “sumatoria”, hace referencia a sumar cada término.

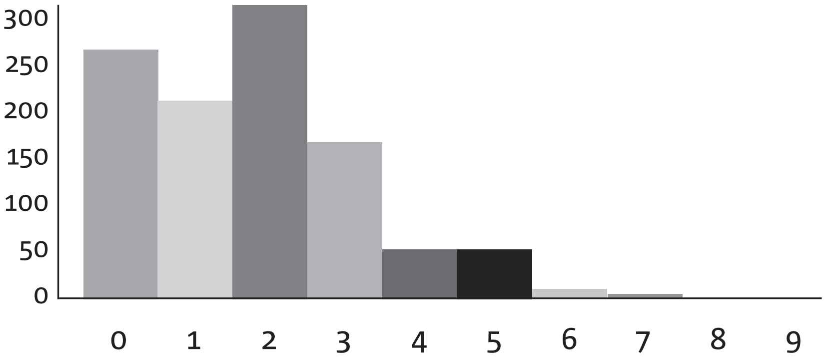
La elección de una medida de posición adecuada para describir un conjunto de datos depende del tipo de variable que se está estudiando y de la forma que tiene la distribución de frecuencias. Para una variable cualitativa, solo es posible determinar la moda y solo es un buen indicador del centro de los datos cuando hay una frecuencia dominante y los datos son numerosos. Si una distribución es asimétrica o tiene valores muy chicos y muy grandes, el cálculo de la media no resulta significativo; cuanto más simétrica es la distribución, la media, la moda y la mediana tienen valores muy similares o coincidentes.

a) Revisá tus respuestas de la actividad 8.a) y 8.b).

b) Un compañero organizó esa información de la manera que aparece a continuación, con la tabla y el gráfico. Respondé:

- ¿Qué significa 1,7 cantidad promedio de hijos?
- ¿Cuál o cuáles de las tres medidas estadísticas representa mejor a la muestra en el contexto de estudio planteado en la actividad 8? ¿Por qué?
- ¿Cuál podría ser la razón por la que se tome esta variable de estudio? ¿Qué tipo de variable es?
- ¿Cuál es la población referida a esta muestra?

Cantidad de hijos	Frecuencia
0	250
1	200
2	300
3	160
4	50
5	20
6	10
7	7
8	2
9	1



ACTIVIDAD 10

Prestá atención a la siguiente situación, sobre todo a los valores numéricos y las conclusiones.

En el mes de diciembre, dos empresas de espectáculos realizaron, cada una, 7 presentaciones de bandas internacionales muy populares para los adolescentes argentinos en dos clubes muy importantes de la ciudad, A y B. Los organizadores comunicaron a los periodistas que, en ambos casos, asistieron en promedio 11.950 jóvenes. El detalle de la concurrencia para uno de los clubes fue: 10.150 chicos en la primera presentación; 12.000 jóvenes en las tres siguientes y 12.500 en los tres espectáculos restantes. En el otro club, concurrieron 13.150 chicos a ver la primera banda, 27.000 adolescentes presenciaron los dos espectáculos siguientes, solo 3.000 chicos asistieron al cuarto evento y 4.500 a los tres últimos espectáculos que ofreció este club.

Estos dos clubes siempre compitieron con respecto a las presentaciones que ambos ofrecen. Los periodistas de espectáculos comentaron en un programa de televisión que les resultaba “extraño” que, en ambos casos, el promedio de jóvenes que asistieron a sus respectivas funciones... ¡fuera el mismo! ¿Por qué se habrán extrañado por este dato?

a) ¿Cómo explicarías la respuesta a esa pregunta?

b) Las medidas de posición, ¿siempre tipifican a la muestra en estudio? ¿Por qué?

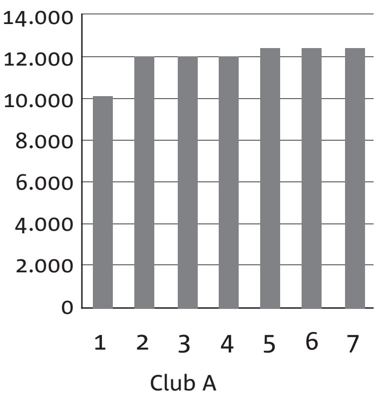
Las medidas de centralización no son suficientes como herramientas en la exploración de la variable de estudio y la comprensión de la situación involucrada, lo que nos pone frente a la necesidad de buscar nuevas medidas estadísticas que sí representen a la muestra estudiada permitiendo así comprenderla mejor, emitir opiniones fundamentadas y hacer algunas inferencias sencillas al respecto.

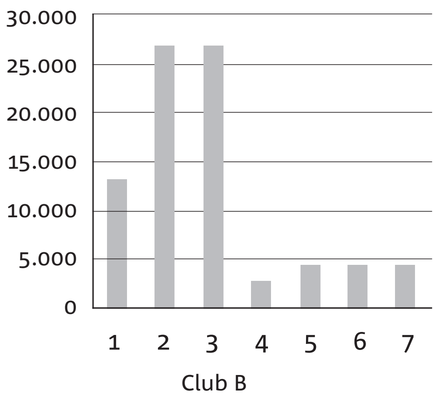
Al resolver, es posible que hayan intentado explicar la situación apelando a las medidas de posición central conocidas o realizando los gráficos, en ambos casos:

-la moda igual a la mediana en cada uno de los casos (en el Club A: Mo=Me=12.000; en el Club B: Mo=Me=4.500);

-el promedio o la media de ambas distribuciones es, efectivamente, 11.950 jóvenes.

Los gráficos son:





Se puede advertir que las distribuciones son muy diferentes y que los datos que otorgan las medidas de posición central no dan respuesta a la situación planteada observando la necesidad de disponer de “otras medidas estadísticas” que representen mejor el comportamiento que se está estudiando. Además, se debe tener en cuenta que los valores, si bien las barras son similares, no responden a las mismas cantidades.

ACTIVIDAD 11

Hallar la media y la mediana de los siguientes valores:

a) 10 - 13 - 18 - 22 - 24 - 29 - 31 - 34 - 35

b) 10 - 13 - 18 - 22 - 24 - 29 - 31 - 34 - 98

¿Qué ocurre con la media en estos casos? Justificar.

ACTIVIDAD 12

Suponé que a un conjunto de datos se le añade un elemento que tiene un valor más grande que cualquiera de los presentes en el conjunto. De la media, la mediana y la moda, ¿cuál se verá menos afectada por el nuevo elemento? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 13

Cinco personas se inscribieron en un torneo de ajedrez. El mayor de ellos tiene 19 años, el promedio de sus edades es 16 años y la mediana de sus edades es 15 mientras que la moda es 14 años. ¿Cuál es la edad de cada uno? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 14

¿Cuál es la edad media del siguiente grupo de alumnos sabiendo que está compuesto por:

11 alumnos de 1° año cuya edad media es 13,6,
15 alumnos de 2° año cuya edad media es 14,3,
14 alumnos de 3° año cuya edad media es 15,8?

5. Probabilidad

Si bien el estudio de las probabilidades comenzó asociado a los juegos de azar hace apenas un poco más de 300 años, sus aplicaciones son hoy indispensables tanto en el ámbito comercial como científico.

ACTIVIDAD 15

La elaboración de las bases del cálculo de probabilidades se debe a Blas Pascal que, en el siglo XVII, se interesó por los juegos de dados al resolver problemas como este:

- ¿Cuántas veces será preciso tirar dos dados para que se pueda apostar con ventaja que, después de esas tiradas, se sacará un doble seis?

- ¿Cuál sería tu respuesta?

Debieron pasar 200 años más para que esta teoría de probabilidades cobrara gran importancia, sobre todo por sus aplicaciones. Hoy, las compañías de seguros basan sus propuestas en cuidadosos análisis estadísticos sobre la frecuencia con la que ocurren ciertos accidentes y enfermedades y, por ejemplo, cobran más si consideran que es posible que una persona tenga un accidente o se enferme, por el tipo de trabajo que realiza.

6. Espacio muestral y probabilidad

En una investigación los datos pueden obtenerse registrando hechos, como al entrevistar a un votante para consultarlo por su decisión o registrar los milímetros de lluvia caídos en un día. Otra forma es a través de experimentos, como cuando se pesa un ratón de laboratorio sometido a ciertas condiciones de alimentación o se saca un número de un bolillero.

En general, se denomina *experimento* al proceso por el cual se obtiene una medida o una determinada observación, *espacio muestral* al conjunto de todos los resultados posibles o sucesos elementales y *suceso* a cualquier conjunto de sucesos elementales.

La probabilidad de un suceso dado es la estimación matemática de la proporción de veces que este ocurrirá o, lo que es lo mismo, su frecuencia relativa para un número significativo de resultados del experimento. Este enfoque de la probabilidad ligado al cálculo estadístico recibe el nombre de *frecuencial*.

Por ejemplo, si se deja caer una moneda al aire 10 veces, podrían aparecer 4 caras y 6 cecas, o 7 caras y 3 cecas y hasta todas caras. Sin embargo, si esta experiencia se realiza 100, 200 o más veces, el número de caras es prácticamente el 50% y se dice que la probabilidad de obtener cara es ½.

ACTIVIDAD 16

¿Qué información se brinda de la tirada de dos dados? ¿Cuántos valores posibles hay? ¿Cuál tiene mayor probabilidad? ¿Por qué?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

En el caso de los experimentos aleatorios, esto es, aquellos experimentos que tienen varios resultados posibles pero no se puede predecir el resultado, cuando se aumenta el número de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un valor fijo, que se define como la probabilidad del suceso.

Se puede afirmar que si se trata de un suceso seguro, esto es, que ocurre el 100% de las veces que se realiza el experimento, su probabilidad es 1 y, si el suceso es imposible, su probabilidad es cero, y que la probabilidad de cualquier suceso es un número entre 0 y 1.

Si bien no es posible predecir el resultado de un experimento aleatorio este siempre conduce a un conjunto de resultados bien identificados. Por ejemplo, si se arroja un dado de seis caras, tantas veces como uno desee, es posible identificar los resultados: 1…6 pero no es posible predecir qué número va a salir.

También existen situaciones que no pueden experimentarse en igualdad de condiciones pero tienen varios resultados posibles que se pueden identificar. Por ejemplo, este fin de semana se juega el partido Boca-River, ¿quién ganará?

En este caso, si bien es posible identificar los resultados, no es posible repetir la experiencia pues incide el estado de la cancha, el tiempo, en qué cancha se juega, la formación del equipo, etc. Sin embargo, es posible analizar el resultado en términos de probabilidad a partir del análisis de los datos.

7. Cálculo de probabilidades

En el caso de experimentos aleatorios en los que todos los sucesos elementales ocurren con la misma frecuencia para un número suficientemente grande de experimentos, como cuando se tira un dado, se dice que los sucesos son equiprobables.

Cuando cada suceso elemental del espacio muestral tiene la misma probabilidad, y si el número de estos sucesos es N, la probabilidad de cada uno es 1/N.

Tomando como ejemplo el tirar un dado, la probabilidad de que salga un número seleccionado entre 1 y 6 es 1/6.

Si un suceso *S* consta de *n* sucesos
elementales equiprobables,
su probabilidad es:

$$\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N}=n\cdot\frac{1}{N},\ n \text{ veces}$$

$$P(S)=\frac{n}{N} \quad \frac{\text{números de sucesos elementales que componen } S}{\text{número total de sucesos elementales del espacio muestral}}$$

En general, la probabilidad de un suceso S se calcula como el cociente entre el número de casos favorables para S dividido el número de casos posibles. Esta manera de calcular la probabilidad de un suceso está ligada a la probabilidad teórica, que define el enfoque *laplaciano*.

a) Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6. Calculá la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 8.

b) ¿Cuál es la suma que tiene mayor probabilidad?

7.1. Probabilidades totales

Si se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra uno o el otro es igual a la suma de las probabilidades de ambos menos la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente.

En símbolos:

$$P(A \text{ o } B)=P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

La siguiente igualdad expresa la misma propiedad en lenguaje conjuntista:

$$P(A \cup B)=P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Veamos un ejemplo. Retomando la actividad 17, proponemos el siguiente juego: se tiran una sola vez dos dados. Se gana si la suma de los dos dados da 6 o si ambos números son impares.

¿Cuál es la probabilidad de ganar en este juego?

Entonces, nuestro espacio muestral es el conjunto formado por los 36 pares de valores, representados en la actividad 17.

Luego podemos definir al suceso A como “obtener 6 como suma”, esto nos da lugar a considerar la probabilidad del evento A.

Tenemos que la cantidad de que ocurra A es 6,

$$A=\{(5,1); (4,2)(3;3);(2,4); (1,5)\},$$

por lo que

$$PA) = \frac{5}{36}$$

Análogamente, definimos el suceso B como “obtener dos números impares” y hacemos lo mismo:

$$B = \{1\ ,1);\ (1\ ,3);\ (1\ ,5);\ (3\ ,1);\ (3\ ,3);\ (3\ ,5);(5\ ,1);\ (5\ ,3);\ (5\ ,5)\},$$

entonces

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Luego podemos definir el suceso C como “obtener como suma 6 o dos números impares”.

El conjunto de casos favorables C será la unión de los dos conjuntos anteriores A y B. Para obtener este conjunto, debemos agregar los elementos de uno al otro cuidando de no superponer los que se encuentran repetidos.

$$A \cap B = \{(1\ ,5);\ (3\ ,3);\ (5\ ,1)\}$$

$C = \{(1,1);\ (1,3);\ (1,5);\ (2,4);\ (3,1);(3,3);\ (3,5);\ (4,2);\ (5,1);\ (5\ ,3);\ (5\ ,5)\},$

Entonces

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

Como puede observarse, la probabilidad de que la suma sea 6 y que ambos números sean impares no es igual a la suma de ambas probabilidades, porque hay algunos casos que son favorables a ambas condiciones y, al realizar el conteo, no debemos considerarlos dos veces.

Sin embargo, advertimos que la cantidad de casos en los que se cumple una condición o la otra (A o B) es igual a la suma de la cantidad de casos en los que se cumple la primera (A) más la cantidad de casos en los que se cumple la segunda (B) menos la cantidad de casos en los que se cumplen simultáneamente ambas condiciones (A y B).

Al considerar esto en los cálculos de las probabilidades de cada uno de estos sucesos, se cumple la siguiente relación:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Volviendo al ejemplo tenemos que

$$P(C)= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (*)$$

$$P(C)= \frac{5}{36} + \frac{1}{4} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

Es decir: la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B es igual a la suma de las probabilidades de ambos sucesos menos la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente.

Cuando los sucesos son mutuamente excluyentes, $A \cap B = \emptyset$

por lo tanto la expresión (*) nos queda:

$$P(C) = P(A) + P(B)$$

7.2. Sucesos complementarios

Si al realizar un experimento, se da que ocurre el suceso A o que ocurre el suceso B sin que puedan darse simultáneamente, se dice que A y B son sucesos complementarios.

En consecuencia: $P(C) + P(B) = 1$

Ejemplo:

Se lanzan tres monedas simultáneamente. El espacio muestral de este suceso será:

E= {(C,C,C); (C,S,C); (C,C,S); (C,S,S); (S,C,C); (S,S,C); (S,C,S); (S,S,S)}

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cecas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener ninguna ceca?

El suceso A = “La probabilidad de obtener cecas”. Podemos observar que las ternas donde aparecen cecas son 7

A = {(C,S,C); (C,C,S); (C,S,S); (S,C,C); (S,S,C); (S,C,S); (S,S,S)}

Calculamos la probabilidad de A y tenemos: $P(A) = \dfrac{7}{8}$

El suceso B = “La probabilidad de obtener ninguna ceca”. Podemos observar que la terna donde no aparece ceca es 1

B = {(C,C,C)}

Calculamos la probabilidad de B y tenemos: $P(B) = \dfrac{1}{8}$

Según lo expresado anteriormente, $P(A) + P(B) = 1$

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{8} = 1$$

7.3. Sucesos independientes

Dos o más eventos son independientes si la ocurrencia de un evento no cambia la probabilidad de que otro evento ocurra.

Existen dos tipos de situaciones cuando esto sucede:

cuando la acción no elimina un resultado (como al lanzar una moneda, extraer bolillas, lanzar un dado varias veces o realizar acciones aleatorias que no tienen conexión una con otra como sacar una carta y luego tirar una moneda);

cuando la acción aleatoria sí elimina un resultado posible, pero el resultado es reemplazado antes que la acción vuelva a suceder (como extraer una bolilla de una urna y devolverla);

cuando los eventos son independientes la probabilidad de que todos ocurran es igual a la multiplicación de las probabilidades de que ocurran los eventos individuales.

$$P(A \text{ y } B) = P(A)\ .\ P(B)$$

Ejemplo:

Se tienen 13 bolillas numeradas del 1 al 13 en una urna. Se saca una bolilla al azar, se la mira y se la devuelve a la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga una bolilla cuyo número sea menor que 6 en el primer intento, pero que sí salga una bolilla cuyo número sea menor que 6 en el segundo intento?

a) Primer intento A = “No salga una bolilla cuyo número sea menor que 6”

$$P(A) = \frac{8}{13}$$

b) Segundo intento A = “Salga una bolilla cuyo número sea menor que 6 en el segundo intento”

$$P(A) = \frac{8}{13} * \frac{5}{13} = \frac{40}{169}$$

7.4. Sucesos dependientes

Dos o más eventos se llaman dependientes cuando el resultado de uno de ellos influye en las probabilidades de los siguientes.

Ejemplo:

Extraemos tres cartas de un mazo de 40. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres ases?

$P(\text{as en la } 1°) = \dfrac{4}{40}$

Si salió as en la primera extracción, quedan 3 ases en 39 cartas. $P(\text{as en } 2°) = \dfrac{3}{39}$

Si salió as en la primera y segunda extracción, quedan 2 ases en 38 cartas, entonces tendremos $P(\text{as en } 3°) = \dfrac{2}{38}$

$$P(3 \text{ ases}) = \frac{4}{40} * \frac{3}{39} * \frac{2}{38} = \frac{1}{2.470}$$

7.5. Probabilidad condicional

La probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrió B, se simboliza $P(A/B)$ y se llama probabilidad condicional.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) \neq 0$$

Ejemplo:

En una urna se tienen bolillas numeradas del 1 al 15. Si se elige al azar una bolilla, ¿cuál es la probabilidad de que salga un múltiplo de 5 si se sabe que el número elegido fue par?

El espacio muestral está formado de la siguiente manera:

E= { b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,b11,b12,b13,b14,b15}

Suceso A: "El número de la bolilla sea múltiplo de 5"

Suceso B: "El número de la bolilla sea par"

A= { b5,b10,b15}

B= {b2,b4,b6,b8,b10,b12,b14}

El evento puede considerarse como: "que ocurra A sabiendo que ocurrió B"

Aplicando la fórmula tendremos

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A/B) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{15}} \Rightarrow P(A/B) = \frac{1}{7}$$

ACTIVIDAD 18

Se arroja un dado y una moneda al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad

a) de obtener un dos o una ceca;

b) de obtener un dos y una ceca?

ACTIVIDAD 19

Se arrojan dos dados. Calculen las probabilidades de que ocurran los siguientes sucesos:

a) de obtener dos números pares;

b) de que la suma sea par;

c) de que la suma sea impar o los dos números obtenidos sean mayores que 3;

d) de que la suma sea mayor que 4 y los dos números sean iguales.

ACTIVIDAD 20

En una bolsa, se introducen quince bolas numeradas del 1 al 15 y se saca una al azar. Calculen las siguientes probabilidades:

a) de que tenga un número par o mayor que 6;

b) de que tenga un número primo o múltiplo de 3;

c) de que tenga un número impar y múltiplo de 3.

ACTIVIDAD 21

Se extrae una carta de un mazo de 40 naipes españoles. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos?

a) El as de oros;

b) un rey;

c) un número menor que 5;

d) una carta de copas;

e) una figura.

ACTIVIDAD 22

Se lanzan cuatro monedas al aire simultáneamente. Calculen las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) de que salga una ceca;
b) de que salgan dos o más caras;
c) de que salgan cuatro caras.

ACTIVIDAD 23

En una escuela secundaria, hay 300 alumnos que se distribuyen según la siguiente tabla.

Turno	Varones	Mujeres	Total
Mañana	95	85	180
Tarde	50	70	120
Total	**145**	**155**	**300**

Supongan que se elige un alumno cualquiera al azar. Calculen las probabilidades:

a) de que sea del turno mañana;
b) de que sea un varón;
c) de que sea del turno tarde;
d) de que sea mujer;
e) de que sea varón sabiendo que concurre al turno mañana;
f) de que sea mujer sabiendo que concurre al turno tarde;
g) de que concurra al turno tarde sabiendo que es varón;
h) de que concurra al turno mañana sabiendo que es varón.

ACTIVIDAD 24

Se tiene una urna con 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Extraemos dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

ACTIVIDAD 25

De un mazo de cartas de truco, se extrae una carta sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de oro o de que sea un siete?

8. A modo de cierre

En esta unidad, avanzamos con el trabajo con dos ejes que se complementan, por lo que podemos organizarlos en:

- Estadísticas y Probabilidad: problemas y paradojas.
- Parámetros, gráficos.

En la presentación de los temas se tomaron en cuenta diferentes enfoques recuperando las nociones matemáticas básicas. Por ejemplo, en el caso de la probabilidad, el enfoque frecuencial se presenta en combinación con la estadística, en tanto que el enfoque laplaciano, se presenta a partir de la relación parte-todo, utilizando el cálculo de probabilidades teóricas.

En ambos casos, se pretende que el trabajo favorezca la argumentación basada en datos empíricos y apunte a la comprensión de la gran masa de información numérica que hoy se recibe a través de distintos medios.

Parte I

a) A veces, al tener que presentarse frente a una situación de examen, es común realizar un punteo o esquema de lo más importante y que nos interesa recordar. ¿Qué pondrías en el correspondiente a esta unidad?

b) Realizá un Glosario con los términos que necesitás recuperar.

Parte II

Como en las otras unidades, te recomendamos que identifiques dificultades y fortalezas en relación con el uso de los contenidos matemáticos abordados. En tal sentido, reflexionando acerca de tu desempeño, ¿en relación con qué considerás necesario seguir trabajando?

Bibliografía

Altman, S., Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2003). *Matemática 1. Funciones 1*. Buenos Aires: Longseller.

Altman, S., Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2003). *Matemática 2. Funciones 2*. Buenos Aires: Longseller.

Azar, G. (dir.) (2014). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Recuperado de http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/matematica-cuadratica.pdf

Benegas, M. (2006). *Matemática. Números racionales*. Col. Aportes para la enseñanza. Nivel medio. Recuperado de http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/matematica_aportesme dia.pdf

Charlot, B. (2008). Fracaso escolar. Conferencia dictada en el *Seminario Internacional de IIPE/UNESCO*, Buenos Aires. Recuperado de https://paraeducar.wordpress.com/2010/05/19/fracaso-escolar-conferencia-b-charlot-2008/.

Charlot, B. (junio 2008). La relación de los alumnos con el saber y con la escuela. Conferencia dictada en el *IV Congreso de Educación*, Montevideo. Recuperado de https://www.google.com.ar/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjdzffb4Y_QAhWKlZAKHclgA2IQFgggMAE&url=http%3A%2F%2Fwww.fumtep.edu.uy%2Findex.php%2Fquehacer-ed%2Fitem%2Fdownload%2F234_30500d532f18b26d1cb2cef1db471335&usg=AFQjCNGmsRAdaJxFuvYME9hl0EfEmmXFqg&bvm=bv.137904068,d.Y2I

Duval, R. (2012). Preguntas y desafíos de la educación matemática para todos. Conferencia dictada en el *IV Coloquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas*, Lima. Recuperado de http://educast.pucp.edu.pe/video/1111/vi_coloquio_internacional_sobre_ensenanza_de_las_matematicas__dr_raymond_duval_francia

COLECCIÓN MORRAL DE APUNTES

MA

Quienes formamos parte de esta casa de altos estudios entendemos que nuestra Universidad debe ser un espacio comprometido con su territorio, es decir, que participe activamente del entorno sociocomunitario y haga parte a su pueblo de la vida universitaria. En este sentido, estamos convencidos de que la Universidad debe ser inclusiva y esto implica no solo ofrecer la posibilidad de ingresar a una carrera sino también desplegar todas nuestras energías para que puedan graduarse en un plazo razonable, de acuerdo al programa de cada carrera. Responsabilidad que, por supuesto, es compartida entre autoridades, docentes y estudiantes. Solo así, aportando cada uno su granito de arena, podremos garantizar un derecho que históricamente ha sido vulnerado para nuestra población: el derecho de ustedes a la Educación Superior y el de la comunidad a beneficiarse del conocimiento de los profesionales que, con su esfuerzo, contribuyó a formar.

Como una herramienta más para contribuir a la calidad académica con inclusión, la UNPAZ entrega, de manera gratuita y a cada alumno del Ciclo de Inicio Universitario, un ejemplar del libro de cada una de las tres materias que lo componen.

ISBN 978-987-4110-41-1

9 789874 110411

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

UNPAZ
Universidad Nacional de José C. Paz